

Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°3 - A remettre le mardi 4 octobre 2011

« Plan de solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ! »

EXERCICE

E est l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} , à valeurs réelles ; a est un réel strictement positif donné. À toute fonction de E , on associe la fonction $T_a(f)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_a(f)(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt$$

1. Soit s la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right)$. Déterminer $T_a(s)$.
2. Soit f une fonction quelconque de E .
 - (a) Montrer que $T_a(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
 - (b) Montrer que $T_a(f)$ est constante si et seulement si f est périodique de période $2a$.
3. Montrer que l'application T_a est un endomorphisme de E .
Est-il injectif ? Est-il surjectif ?

PROBLEME

1. On note \mathcal{S} l'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{R} , vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, x f'(x) = 3f(x).$$

- (a) Démontrer que \mathcal{S} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
 - (b) Résolution sur l'intervalle $]0, +\infty[$: déterminer l'ensemble S_+ des solutions, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle précédente.
 - (c) Résolution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$: déterminer l'ensemble S_- des solutions, sur $]-\infty, 0[$ de l'équation différentielle précédente.
 - (d) En déduire les solutions de l'équation différentielle sur \mathbb{R} .
 - (e) On pose $f_+ : x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ et $f_- : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Représenter f_+ et f_- .
Justifier que la famille (f_+, f_-) est une base de l'espace vectoriel \mathcal{S} .
2. $E = \mathbb{R}_3[\mathbb{X}]$. On considère Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_3[\mathbb{X}]$ de la façon suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[\mathbb{X}], \Phi(P) = XP' - 3P.$$

- (a) Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathbb{X}]$.
 - (b) Démontrer que $\ker \Phi = \text{Vect}(X^3)$.
 - (c) Démontrer que $\text{Im } \Phi = \mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$.
 - (d) Justifier que l'équation différentielle $xy' - 3y = 2x^2 + x - 1$ admet une unique solution polynomiale de degré inférieur ou égal à deux. *On répondra à cette question sans résoudre l'équation différentielle mais en utilisant les informations sur $\text{Im } \Phi$ et $\ker \Phi$.*
 - (e) On note $Q = 2X^2 + X - 1$ et P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$ tel que $\Phi(P) = Q$. Déterminer P .
3. Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : « $xy' - 3y = 2x^2 + x - 1$ ».
Constituent-elles un espace vectoriel ?