Correction du devoir n°2

Partie I : Résultats préliminaires

1. Soit $a > \dfrac{1}{4}$; le polynôme $P = X^2 + X + 1 - 3\,a$ a un discriminant strictement positif : $\Delta = 1 - 4\,(1 - 3\,a) = 12\,a - 3$ donc l'équation $x^2 + x + 1 - 3\,a = 0$ admet deux racines réelles distinctes.
2. On calcule le rang de la matrice M par des manipulations sur ses lignes :
$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & r_1 & r_2\\ 1 & (r_1)^2 & (r_2)^2\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & r_1 - 1 & r_2 - 1\\ 0 & (r_1)^2 - 1 & (r_2)^2 - 1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L1\end{matrix}$$
$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & r_1 - 1 & r_2 - 1\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (r_1 + 1)\,L_2 \text{ avec } \alpha = \Big((r_2)^2 - 1\Big) - (r_1 + 1)\,(r_2 - 1) = (r_2 - 1)\,(r_2 - r_1)$$
$r_2 \neq 1$ et $r_1 - r_2$ est non nul, ainsi M a même rang qu'une matrice triangulaire supérieure sans coefficient nul sur la diagonale ; par conséquent M est de rang 3 donc inversible.

Partie II : Étude de F

1. (a) Bien évidemment F est inclus dans E et non vide, car la suite nulle vérifie la relation donnée.
Soient à présent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E et λ un réel quelconque.
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3a\,u_{n+1} + (1 - 3\,a)u_n$ et $v_{n+3} = 3a\,v_{n+1} + (1 - 3\,a)v_n$ donc
$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda\,u_{n+3} + v_{n+3} = \lambda\Big(3\,a\,u_{n+1} + (1 - 3\,a)u_n\Big) + 3\,a\,v_{n+1} + (1 - 3\,a)v_n$
La suite $\lambda\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de F qui est donc stable par combinaison linéaire. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E.
(b) On a $1 = 3\,a \times 1 + (1 - 3\,a) \times 1$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F
$\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+3} = (r_1)^{n+3} = (r_1)^n \times (r_1)^3$, or $(r_1)^2 + r_1 + 1 - 3\,a = 0$ donc
$(r_1)^3 = -(r_1)^2 + (3\,a - 1)\,r_1 = r_1 + 1 - 3\,a + (3\,a - 1)\,r_1 = 1 + 3\,a(r_1 - 1)$
Ainsi $y_{n+3} = (r_1)^n\big(1 - 3\,a + 3\,a\,r_1\big) = 3\,a(r_1)^{n+1} + (1 - 3\,a)\,(r_1)^n = 3\,a\,y_{n+1} + (1 - 3\,a)\,y_n$
On a ainsi prouvé que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de F, les calculs sont identiques pour $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En conclusion $\boxed{\text{Les suites } (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartiennent à } F}$
(c) Soient α, β et γ 3 réels tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha\,x_n + \beta\,y_n + \gamma\,z_n = 0$, on a en particulier :
pour $n = 0\ : \alpha + \beta + \gamma = 0$
pour $n = 1\ : \alpha + \beta\,r_1 + \gamma\,r_2 = 0$
pour $n = 2\ : \alpha + \beta\,(r_1)^2 + \gamma\,(r_2)^2 = 0$, ce qui peut s'écrire matriciellement : $M \times \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
On a vu dans la partie I que M est inversible, donc la seule solution de ce système est $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,
ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha\,x_n + \beta\,y_n + \gamma\,z_n = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. La réciproque est vraie bien sûr, donc la famille est $\Big((x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ est une famille libre de F.

2. (a)
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \omega_{n+2} + \omega_{n+1} + (1 - 3\,a)\,\omega_n &= (u_{n+3} - u_{n+2}) + (u_{n+2} - u_{n+1}) + (1 - 3\,a)\ (u_{n+1} - u_n)\\ &= u_{n+3} - 3\,a\,u_{n+1} - +(1 - 3\,a)\,u_n\\ &= 0\end{aligned}$$
(b) $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire à deux termes, l'équation caractéristique associée est $X^2 + X + 1 - 3\,a = 0$. Les racines sont r_1 et r_2.
Il existe donc deux constantes réelles λ et μ telles que l'on ait $\forall n \in \mathbb{N},\ \omega_n = \lambda\,(r_1)^n + \mu\,(r_2)^n = u_{n+1} - u_n$
(c) On somme ces égalités pour tous les entiers k de 0 à $n - 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{n+1} - u_n) = u_n - u_0$.
$$\text{Soit } u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\big(\lambda\,(r_1)^k + \mu\,(r_2)^k\big) = \lambda\sum_{k=0}^{n-1}(r_1)^k + \mu\sum_{k=0}^{n-1}(r_2)^k = \lambda \times \frac{1 - (r_1)^n}{1 - r_1} + \mu \times \frac{1 - (r_2)^n}{1 - r_2} + u_0$$

3. D'après la question précédente, pour toute suite de F, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que l'on ait $\forall n \in \mathbb{N},\ \omega_n = \lambda \times \dfrac{1 - (r_1)^n}{1 - r_1} + \mu \times \dfrac{1 - (r_2)^n}{1 - r_2} + u_0 = \dfrac{\lambda}{r_1 - 1}\,(r_1)^n + \dfrac{\mu}{r_2 - 1}\,(r_2)^n + \dfrac{\lambda}{r_1 - 1} + \dfrac{\mu}{r_2 - 1} + u_0$.
Ainsi toute suite de E d'exprime comme combinaison linéaire des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc cette famille engendre E.
On savait déjà (question 1c) que cette famille est libre, on peut donc conclure que c'est une base de F.