Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°7 - A préparer pour le lundi 12 décembre 2016

Exercice 1

Dans un élevage de poules pondeuses, aux heures de ponte maximale, le nombre X d'œufs pondus en 15 minutes dans un enclos suit une loi de Poisson de paramètre 10.

1. Quelles sont les valeurs de X ayant la probabilité maximale ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 8 et 12 œufs (au sens large) pondus en 15 minutes ?
3. Certains œufs sont déclassés (cassés ou poids insuffisant). La probabilité qu'un œuf soit déclassé est de $0,03$. Sur un lot de N œufs pondus, quelle est la loi Y_N suivie par le nombre d'œufs déclassés ?
4. Quelle est la loi suivie par Y, le nombre d'œufs déclassés ?

Exercice 2

On dispose de deux dés équilibrés qu'on lance simultanément. D_1 est la variable aléatoire qui renvoie le numéro obtenu par le premier dé et D_2 celle qui renvoie le numéro obtenu par le second. On note m et M respectivement les plus petit et plus grand numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de m, son espérance et sa variance.
2. En remarquant que $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z-\min(x,y)=\max(z-x,z-y)$, justifier que M a même loi que $7-m$. En déduire la loi de M, son espérance et sa variance.
3. On rappelle le résultat suivant pour des variables aléatoires A et B admettant des moments d'ordre deux : $V(A+B)=V(A)+V(B)+2\,\mathrm{Cov}(A,B) \quad (\star)$
   (a) Que devient $(\star)$ lorsque A et B sont indépendantes ?
   (b) Comparer $m+M$ et D_1+D_2. En déduire la valeur de $V(m+M)$.
   (c) Calculer $\mathrm{Cov}(m,M)$, par exemple en utilisant $(\star)$.
4. (a) Écrire en Python une fonction *minimum*() sans variable d'entrée qui simule la loi de m.
   (b) On répète $N=10000$ fois l'expérience ; écrire un programme qui appelle la fonction *minimum* et renvoie les fréquences d'apparition des différentes valeurs de m. Commentaire ?

Exercice 3

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n ($n\leqslant N$) une à une sans remise. On désigne par X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et $X(\Omega)$, les univers images de X et de Y.
2. Calculer $P(X\geqslant x)$ pour tout $x\in X(\Omega)$. En déduire la loi de X.
3. Calculer $P(Y\leqslant y)$ pour tout $y\in Y(\Omega)$. En déduire la loi de Y.
4. Calculer $P\Big((X>x)\cap(Y\leqslant y)\Big)$ pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$. En déduire la loi du couple (X,Y).
5. (a) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,q]\!]$; montrer que $E(Z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{q}P(Z\geqslant k)$
   (b) Appliquer ce résultat au calcul de l'espérance de X.