MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°3
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME N°1

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels non nuls. On lui associe la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$p_n = u_1 \times \cdots \times u_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

On dit que le « produit infini $\prod_n u_n$ » converge si la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ admet une limite finie et non nulle. On écrira alors

$$\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = L \text{ où } L \text{ est la limite finie non nulle de la suite } (p_n)$$

Dans tous les autres cas, on dit que le « produit infini $\prod_n u_n$ » diverge.

1. Exemple 1.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite produit associée définie par $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Calculer p_n. Quelle est la nature du « produit infini $\prod_n u_n$ » ?

2. Exemple 2.

Soit a un réel, $a \notin \{k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$ et $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite produit associée définie par $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$.

(a) Montrer que $\sin a = 2^n \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$.

(b) En déduire que le « produit infini $\prod_n u_n$ » converge. En déduire que $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\sin a}{a}$.

3. Quelques résultats sur la convergence d'un produit de termes ≥ 1

Soit $(w_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs ou nuls. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + w_n$ et $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+w_k)$.

(a) Établir l'inégalité suivante : $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

(b) Justifier l'existence d'un réel α strictement positif tel que : $\forall x \in]0, \alpha], \quad \frac{x}{2} \leq \ln(1+x)$.

(c) Montrer que si la série $\sum w_k$ converge, alors la série $\sum \ln(1+w_k)$ converge.

(d) Montrer que si $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1+w_k) = L$ réel, alors le « produit infini $\prod_n u_n$ » converge.

Donner alors la limite de (p_n) en fonction de L. Que vaut alors $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$?

(e) Montrer que si le « produit infini $\prod_n u_n$ » converge, alors la série $\sum w_k$ converge.

(f) Qu'a-t-on démontré dans cette question 3 ?

4. Application 1.

On pose $u_n = \sqrt[n]{n}$, puis $p_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

(a) Quelle est la nature de la suite (S_n) ? En déduire, grâce aux résultats de la question 3, la nature du « produit infini $\prod_n u_n$ ».

Dans les questions suivantes, on va trouver un équivalent de S_n, quand n tend vers $+\infty$, grâce à une comparaison "série-intégrale" :

(b) Pour tout entier $n \geq 3$, calculer l'intégrale $\int_3^n \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$.

(c) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, $\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x \leq \frac{\ln k}{k}$.

(d) En déduire un encadrement de S_n, puis montrer que S_n est équivalent à $\frac{(\ln n)^2}{2}$ quand n tend vers l'infini.

5. Application 2.

Soit $a > 0$. On pose $u_n = 1 + a^{2^n}$, puis $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a^{2^k})$.

(a) Quelle est la nature de la suite (p_n) pour $a \geq 1$?

(b) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2^k$.

(c) On suppose que $0 < a < 1$. Montrer que la suite (p_n) converge.

(d) Pour $n \geq 1$, calculer $(1 - a^2)p_n$ et en déduire la limite de la suite (p_n).

Que vaut alors $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$?

PROBLEME N°2

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Introduction et notations

Le jeu de pile ou face, joué avec des pièces équilibrées ou biaisées, permet la modélisation la plus simple et la plus intuitive des expériences de Bernoulli.

Par convention, la lettre Π (pour Pile) sera associée au succès de l'expérience, avec une probabilité de p, $p \in]0,1[$ et la lettre Φ (pour Face) sera associée à l'échec de cette expérience, avec une probabilité de $q = 1 - p$.

Partie I - Algèbre et probabilités.

On lance une pièce (non nécessairement équilibrée) autant de fois que nécessaire jusqu'à l'obtention de deux succès consécutifs. Les résultats des lancers sont mutuellement indépendants.
On notera, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n, U_n et V_n les événements suivants :

- S_n « On obtient pour la première fois deux Π consécutifs aux n-ième et $(n+1)$-ième lancers. »
  Par exemple, la suite de lancers $(\Pi, \Phi, \Phi, \Phi, \Pi, \Phi, \Pi, \Pi)$ *réalise* S_7.
- U_n « Les n premiers lancers ne donnent pas deux Π consécutifs, le n-ième donne Π. »
  La suite précédente réalise U_1, U_5, U_7 *mais pas* U_8, *car* Π *est obtenu aux places consécutives 7 et 8.*
- V_n « Les n premiers lancers ne donnent pas deux Π consécutifs, le n-ième donne Φ. »
  La suite précédente réalise V_2, V_3, V_4 *et* V_6.

On note respectivement $s_n = P(S_n)$, $u_n = P(U_n)$ et $v_n = P(V_n)$, les probabilités de réaliser les événements S_n, U_n et V_n.

1. (a) Déterminer, pour $n \geq 1$, les probabilités conditionnelles :

$$P(U_{n+1}|U_n),\ P(U_{n+1}|V_n),\ P(V_{n+1}|U_n) \text{ et } P(V_{n+1}|V_n)$$

(b) En déduire que pour $n \geq 1$, on a :

$$u_{n+1} = p\, v_n,\ \ s_n = p\, u_n \text{ et } v_{n+1} = q\,(u_n + v_n)$$

(c) Montrer que $v_1 = q$ et $u_1 = p$. En déduire s_1 et pour $i \in \{2,3\}$, les valeurs de s_i, u_i et v_i.

2. On se propose de résoudre le système défini pour $n \geq 1$:

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & p\, v_n \\ v_{n+1} & = & q\,(u_n + v_n) \end{array} \right.$$

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $v_{n+2} = q\, v_{n+1} + q\, p\, v_n$
En déduire que pour tout $n \geq 1$, $s_{n+2} = q\, s_{n+1} + q\, p\, s_n$.

(b) Dans cette seule question, on suppose que $p = \frac{2}{3}$.
Déterminer v_n pour $n \geq 1$; en déduire u_n et montrer que $s_n = \dfrac{4}{9}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right]$

(c) On pose $\Delta = q^2 + 4\,q\,p$, $r_1 = \dfrac{q + \sqrt{\Delta}}{2}$, et $r_2 = \dfrac{q - \sqrt{\Delta}}{2}$; montrer que $s_n = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\,(r_1^n - r_2^n)$.
Indication : on pourra remarquer que $r_1 + r_2 = q$, $r_1 - r_2 = \sqrt{\Delta}$ *et* $r_1\, r_2 = -q\,p$.

3. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} s_n$.

(b) On désigne par X le nombre aléatoire de lancers nécessaires à l'obtention de deux Π consécutifs. Nous conviendrons que X vaut $+\infty$ si ceci ne se produit jamais.

– Montrer que $([X = n])_{n \in [\![2,+\infty[\![}$ constitue un système quasi complet d'événements.

– Calculer $E\,(X) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n\, P\,(X = n)$ et $E\,(X^2) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n^2\, P\,(X = n)$.

Partie II - Combinatoire et probabilités.

On dispose de deux pièces distinctes numérotées 1 et 2, équilibrées ($p = q = \frac{1}{2}$) et on réalise l'expérience suivante : pour n entier supérieur ou égal à 1, on répète n lancers simultanés des deux pièces. Les lancers sont mutuellement indépendants.
On note les résultats sous forme de tableau :

$$\begin{pmatrix} N^o \text{ du lancer} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ \text{Pièce 1 :} & \Pi & \Pi & \Phi & \Pi & \Phi & \Phi & \cdots & \cdots \\ \text{Pièce 2 :} & \Phi & \Pi & \Phi & \Phi & \Pi & \Pi & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ on considère l'événement
A_k : « À l'issue du k-ième lancer, les deux pièces ont donné le même nombre de Π. »
Dans l'exemple ci-dessus, seul A_6 est réalisé.
Dans la suite du problème, on pose $P(A_0) = 1$ et on s'intéresse particulièrement à l'événement A_n.

1. (a) Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$; calculer la probabilité qu'à l'issue des n lancers la première pièce ait donné j fois Π.

(b) Pour $j \in \{0, \ldots, n\}$, on désigne par $p_j(n)$ la probabilité qu'à l'issue des n lancers les deux pièces aient donné chacune j fois Π. Calculer $p_j(n)$.

(c) En déduire que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^{2n}} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$. Calculer $P(A_6)$ (fraction irréductible et valeur approchée à 10^{-2} près . *Rappel ! Vous n'avez pas droit à la calculatrice.*)

2. Calcul de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$.

(a) On considère un ensemble E formé de $2\,n$ boules deux à deux discernables dont n noires et n blanches. On note P l'ensemble des parties à n éléments de cet ensemble ; déterminer le nombre d'éléments de P.

(b) Soit P_j l'ensemble des parties à n éléments contenant j boules blanches ; déterminer le nombre d'éléments de P_j.

(c) Déduire de ce qui précède $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \binom{2\,n}{n}$, puis la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$.

3. Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$, on définit la variable aléatoire X_k à valeurs dans $\{0, 1\}$ de la façon suivante :

X_k prend la valeur 1 si A_k est réalisé et la valeur 0 sinon.

Soit $N = \sum_{k=0}^{n} X_k$ l'aléa égal au nombre de fois où l'un des événements A_k est réalisé

(a) Montrer que l'espérance de N vaut : $E(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2\,k}{k}$.

(b) Démontrer par récurrence que $E(N) = \dfrac{2\,n+1}{2^{2n}} \dbinom{2\,n}{n}$.

- fin -