2 BCPST 1 & 2 Mardi 3 septembre 2013

**EPREUVE DE MATHEMATIQUES**
**Durée : 2 heures 30**

**Exercice 1 :**
Soit $Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2-2\,i}$ et $M$ le point d'affixe $Z$ du plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O,\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$.

a) Le complexe $2-2\,i$ a pour module $2\sqrt{2}$ et l'un de ses arguments vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

b) La distance $OM$ vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et les mesures de l'angle $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$ sont : $\dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

c) Le parties réelles et imaginaires de $Z$ valent respectivement : $\mathrm{Re}\,(Z) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$, $\mathrm{Im}\,(Z) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$.

d) $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

**Exercice 2 :**

a) $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ et $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

b) $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ et $\cos^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$.

c) $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$.

d) $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

**Exercice 3 :**
Soit $P$ la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + x^2 - \dfrac{4}{27}$

a) La fonction $P$ est croissante.

b) Le polynôme $P$ admet trois racines réelles distinctes.

c) Le polynôme $P$ admet une racine double $a = -\dfrac{1}{3}$ et une racine simple $b = \dfrac{2}{3}$.

d) L'ensemble des solutions de $P(x) < 0$ est borné.

**Exercice 4 :**
Soient $A,\ B,\ C$ les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

a) Le produit $AB$ est égal à la matrice $C$.

b) La matrice $A$ est inversible.

c) $B$ est la seule matrice telle que $AB = C$.

d) La transposée de $C$ vaut ${}^tC = B\,{}^tA$.

**Exercice 5 :**
Soit $(\mathcal{S})$ le système de trois équations à trois inconnues $x,\ y,\ z$ de paramètre $m$

$$(\mathcal{S})\qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ x & + & m\,y & + & z & = & m+2 \end{array}\right.$$

a) Pour $m \neq 2$, $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer (i.e admet une unique solution).

b) Pour $m = 0$, $(\mathcal{S})$ admet pour seule solution : $x = 2,\ y = 1,\ z = 0$.

c) Pour $m = 2$, $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions.

d) $x + y = 0$ est l'équation d'une droite de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.

**Exercice 6 :**
Soit $(x_n)$, $(y_n)$, $(z_n)$ et $(t_n)$ les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{c} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + 2 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{c} y_0 = 2 \\ y_{n+1} = 3\,y_n \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{c} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = 3\,z_n + 2 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{c} t_0 = 1 \ \text{ et } \ t_1 = 1 \\ t_{n+2} = 3\,t_{n+1} + 2\,t_n \end{array}\right.$$

a) Le $101^{\text{ème}}$ terme de la suite $(x_n)$ vaut : $x_{100} = 203$

b) Le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme de la suite $(y_n)$ vaut : $y_n = 2 \times 3^n$

c) Le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme de la suite $(z_n)$ vaut : $z_n = 4 \times 3^n - 3$

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \dfrac{17 - \sqrt{17}}{34} \times \left(\dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + \dfrac{17 + \sqrt{17}}{34} \times \left(\dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)^n$

**Exercice 7 :**
Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \longmapsto 2 - \sqrt{x^2 + 1}$.

a) La fonction $f$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ et $0 \leqslant x \leq \sqrt{3} \Longrightarrow 0 \leqslant f(x) \leq \sqrt{3}$

b) La courbe représentative de $f$ admet au voisinage de $+\infty$ une droite asymptote oblique.

c) La suite $(u_n)$ est convergente de limite finie $\ell = \dfrac{4}{5}$.

d) La suite $(u_n)$ est monotone.

**Exercice 8 :**
Soient $f : x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puis $g : x \longmapsto \cos(2\arccos(x))$ et $h : x \longmapsto \arccos(\cos x)$.

a) La fonction $f$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée $f'$ est nulle sur $\mathbb{R}^*$.

b) La fonction $f$ est constante sur $\mathbb{R}^*$.

c) Les fonctions $g$ et $P : x \longmapsto 2x^2 - 1$ coïncident sur l'intervalle $[-1, +1]$.

d) Les fonctions $h$ et $Q : x \longmapsto x$ coïncident sur l'intervalle $[-1, +1]$.

**Exercice 9 :**
Soient $f : x \longmapsto e^{2x}\cos x$ puis $g : x \longmapsto e^{2x}\sin x$ et $h : x \longmapsto x\ln\left(x^2+1\right)$.

a) La dérivée de $f$ est $f\,' : x \longmapsto 2e^{2x}\left(\cos x - 2\sin x\right)$.

b) Les fonctions $f$ et $g$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = 0$.

c) La dérivée première de $h$ est $h' : x \longmapsto \ln\left(x^2+1\right) + \dfrac{x}{x^2+1}$.

d) La dérivée seconde de $h$ est $h'' : x \longmapsto \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

**Exercice 10 :**
Soient $u,\ v,\ w$ trois fonctions dont les DL au voisinage de $1,\ 1$ et $3$ aux ordres respectifs $2,\ 3$ et $2$ sont :

$$u(1+h) \underset{h\to 0}{=} 3+h+2h^2+o\left(h^2\right) \quad ; \quad v(1+h) \underset{h\to 0}{=} h+2h^2+h^3+o\left(h^3\right) \quad ; \quad w(3+h) \underset{h\to 0}{=} 1+h+2h^2+o\left(h^2\right)$$

Nécessairement :

a) $A(1+h) \underset{h\to 0}{=} 3+2h+4h^2+h^3+o\left(h^3\right)$ où $A$ désigne la fonction qui à tout $x$ associe $A(x) = u(x)+v(x)$

b) $B(1+h) \underset{h\to 0}{=} 3h+7h^2+7h^3+o\left(h^3\right)$ où $B$ désigne la fonction qui à tout $x$ associe $B(x) = u(x)\times v(x)$

c) $C(1+h) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{3}h+\frac{5}{9}h^2-\frac{2}{27}h^3+o\left(h^3\right)$ où $C$ désigne la fonction qui à tout $x$ associe $C(x) = \dfrac{v(x)}{u(x)}$

d) $D(1+h) \underset{h\to 0}{=} 1+h+4h^2+8h^3+o\left(h^3\right)$ où $D$ désigne la fonction qui à tout $x$ associe $D(x) = w\big(u(x)\big)$

**Exercice 11 :**

a) $\sin(h) \underset{h\to 0}{=} h - \dfrac{1}{6}h^3 + o\left(h^3\right)$ et $\cos(h) \underset{h\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}h^2 + o\left(h^3\right)$

b) $\dfrac{1}{1+h} \underset{h\to 0}{=} 1+h+h^2+o\left(h^2\right)$ et $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h + \dfrac{1}{2}h^2 + o\left(h^2\right)$

c) $\arctan(h) \underset{h\to 0}{=} h - \dfrac{1}{3}h^3 + o\left(h^4\right)$ et $\exp(h) \underset{h\to 0}{=} 1+h+\dfrac{1}{2}h^2+\dfrac{1}{6}h^3+o\left(h^3\right)$

d) $\sqrt{1+h} \underset{h\to 0}{=} 1+\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{8}h^2+o\left(h^2\right)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+h}} \underset{h\to 0}{=} 1-\dfrac{1}{2}h+\dfrac{3}{8}h^2+o\left(h^2\right)$

**Exercice 12 :**
Nous disposons de huit plaques dont trois portent le chiffre 1, deux portent le chiffre 3, les trois autres portant les chiffres 5, 7, 8. Ces plaques sont mises dans un sac. Nous tirons une à une et au hasard les plaques de cette urne en disposant les plaques de la gauche vers la droite. À titre d'exemple le tirage suivant

$$\boxed{8}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}$$

a permis de composer le nombre de huit chiffres suivant : 81371135 qui est alors considéré comme le résultat de cette expérience.

a) Lors ce cette expérience, nous pouvons former exactement 6720 nombres distincts de 8 chiffres.

b) La probabilité d'obtenir un résultat avec trois 1 consécutifs vaut $\dfrac{3}{28}$.

c) La probabilité pour que les trois « 1 » sortent avant les deux « 3 » vaut : $\dfrac{1}{168}$

d) La probabilité que le résultat se termine par 1 vaut $\dfrac{3}{8}$.

**Exercice 13 :**

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \ln 2$.

c) À l'aide du changement de variable $t = \arcsin x$, on trouve $\displaystyle\int_0^1 2\,\arcsin x\,\mathrm{d}x = \pi - 2$.

d) $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_0^x t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-x}$.

**Exercice 14 :**

Soit $X_1,\, X_2, \cdots, X_{16}$ 16 variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ telle que :

$$\forall k \in \{1,\, 2, \cdots, 16\}, \quad \mathrm{P}\left(X_k = 0\right) = 0,3 \;\text{ et }\; \mathrm{P}\left(X_k = 1\right) = 0,5 \;\text{ et }\; \mathrm{P}\left(X_k = 2\right) = 0,2.$$

Nous poserons $\overline{X} = \dfrac{X_1 +\, X_2 + \cdots + X_{16}}{16}$

a) L'espérance de $X_1$ vaut $0,9$ ainsi que celle de $\overline{X}$.

b) L'écart-type de $X_1$ vaut $0,7$.

c) L'écart-type de $\overline{X}$ vaut $0,7$.

d) La fonction de répartition de $\overline{X}$ prend exactement 34 valeurs.

**Exercice 15 :**

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ qui au couple $(x, y)$ associe le couple $(4x + 3y, x + 2y)$.
Nous noterons id, l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ qui au couple $(x, y)$ associe le couple $(x, y)$.

a) Cette application $f$ est linéaire et sa matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $f$ est bijective, mais $f - 5\,\mathrm{id}$ ne l'est pas.

c) Le vecteur $(1, 1)$ appartient au noyau de $f - 5\,\mathrm{id}$.

d) $f - \mathrm{id}$ n'est pas injective et $(-1, 1)$ appartient au noyau de $f - \mathrm{id}$.

**Exercice 16 :**

a) $\ln x$ et $\ln(x + 1)$ sont équivalents lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

b) $\exp(x)$ et $\exp(x + 1)$ sont équivalentes lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = 1$.

d) la fonction $h : x \longmapsto (x + 1)^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h'(x) = x\,(x + 1)^{x-1}$.