2 BCPST 1 & 2 Samedi 8 mars 2014

**MATHÉMATIQUES**
**Devoir surveillé n˚6**
Durée : 3 heures 30

***L'usage d'une calculatrice n'est pas autorisé pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.***

# EXERCICE

Nous noterons $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ et $\Phi : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$
Soit $X$ une variable aléatoire distribuée selon la Loi de Gauss $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ et $Y$ l'aléa défini par $Y = e^X$.

1. Exprimer à l'aide de $\Phi$ la fonction de répartition $F$ de la variable aléatoire $X$.
2. Déterminer à l'aide de $\Phi$ la fonction de répartition $G$ de $Y$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité. Déterminer alors une densité $g$ de $Y$.
4. Montrer en utilisant le théorème de transfert que l'espérance de $Y$ vaut : $\mathrm{E}(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$.
5. En déduire l'espérance de $Y^2$ après avoir précisé au préalable la Loi de $2X$ et noté que $Y^2 = e^{2X}$.
6. Montrer que la variance de $Y$ vaut $V(Y) = e^{2\mu}\left(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}\right)$

# PROBLÈME 1

Soit $n$ un entier naturel et $\lambda$ un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction $f_n$ définie par

$$\begin{cases} f_n(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f_n(t) = \lambda^2 t^n e^{-\lambda t} & \text{pour } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n$, $f_n$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ ?
2. En considérant que, pour tout entier naturel $n$, une primitive de $f_n$ sur $[0, +\infty[$ est de la forme : $t \mapsto P(t)e^{-\lambda t}$ où $P$ est un polynôme, justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
   Donner une relation entre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\mathrm{d}t$.
3. Calculer, pour tout entier naturel $n$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.
4. Montrer que $f_1$ est une densité de probabilité.
5. Soit $p$ un entier naturel non nul. On considère $p$ variables aléatoires réelles $T_i$ où $i$ varie de 1 à $p$. Ces variables sont indépendantes et ont la même densité de probabilité $f$ définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{pour } t \geqslant 0 \end{cases}$$

   Montrer que, pour $i$ appartenant à $[\![1, p]\!]$, $T_i$ admet une espérance et une variance et les calculer.

**6**. La variable aléatoire $T_i$ représente la durée de vie du $i^{\text{ème}}$ élément d'un système $S$ comportant $p$ éléments. On suppose que le système $S$ tombe en panne lorsqu'un de ses éléments tombe en panne. On dit que le système $S$ est en série.
On note $T$ l'instant où $S$ tombe en panne.
Déterminer la fonction de répartition et une densité de probabilité de $T$.

**7**. Soit $V$ un système comportant deux éléments de durée de vie respectives $T_1$ et $T_2$. On suppose que le système $V$ tombe en panne uniquement si ses deux éléments tombent en panne. On dit que le système $V$ est un système en parallèle.
Soit $W$ l'instant où $V$ tombe en panne.
Déterminer la fonction de répartition et une densité de probabilité de $W$.

**8**. Pour $i$ égal à 1 ou 2, comparer les probabilités des événements $(T_i \geqslant t)$, $(T \geqslant t)$ et $(W \geqslant t)$. Que peut-on en conclure quant-à la fiabilité des différents systèmes ?

**9**. Soit $q$ un entier naturel non nul et $\mu$ un nombre réel strictement positif différent de $\lambda$.
On considère $q$ variables aléatoires $U_j$ où $j$ varie de 1 à $q$. Ces variables aléatoires sont indépendantes et ont la même densité de probabilité $g$ définie par

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ g(t) = \mu^2 t e^{-\mu t} & \text{pour } t \geqslant 0 \end{cases}$$

On mélange $p$ éléments de durée de vie $T_i$ et $q$ éléments de durée de vie $U_j$. On choisit au hasard un élément de ce mélange. On note $X$ sa durée de vie.

(a) Déterminer une densité de probabilité de $X$.

(b) Montrer que $X$ admet une espérance et la calculer.

(c) Montrer que $X$ admet une variance et la calculer.

# PROBLÈME 2

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés élémentaires de la fonction d'entropie qui mesure « l'incertitude » sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

## Notations

Dans tout ce problème, $n$ désigne un entier naturel.
On note alors $I_n = \left\{k \in \mathbb{N} / 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$, c'est à dire l'ensemble des entiers compris entre 0 et $n$.
Si $X$ est une variable aléatoire discrète, on désigne par support de $X$ l'ensemble des valeurs de $k$ telles que $P(X = k) \neq 0$.

## Préliminaires

**1**. On note $h$ l'application de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par ; $h(0) = 0$ et pour tout $x > 0$, $h(x) = x \ln(x)$.
Montrer que $h$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

**2**. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$ et que $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.

Dans ce problème, on distingue trois cas :

- Si $X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $I_n$ :
On désigne par entropie de variable $X$ le réel $H(X)$ défini par :

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} h(p_k) \quad \text{où} \quad \forall k \in I_n,\ p_k = P(X = k)$$

- Si $X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ :
  On désigne par entropie de variable $X$ le réel $H(X)$ défini par :

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{+\infty} h(p_k) \quad \text{où} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ p_k = P(X = k)$$

sous réserve **d'absolue convergence** convergence de cette série.

- Si $X$ est une variable aléatoire réelle de densité $f$ :
  On désigne par entropie de la variable $X$ le réel $H(X)$ défini par :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h\Big(f(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$ sous réserve **d'absolue convergence** de cette intégrale généralisée.

## Partie I . Exemples

**1.** Deux variables aléatoires discrètes.

(a) Dans cette question, $X$ est une variable aléatoire distribuée selon la Loi Uniforme sur $I_n$. Calculer $H(X)$.

(b) Dans cette question, $X$ est une variable aléatoire distribuée selon la Loi Géométrique de paramètre $p \in ]0,1]$ de support $\mathbb{N}$. Vérifier que $H(X) = \ln\frac{1}{p} + \frac{q}{p}\ln\frac{1}{q}$ où $q = 1-p$.

**2.** Trois variables aléatoires à densité.

(a) Dans cette question, $X$ est une variable aléatoire distribuée selon la Loi Uniforme sur $[a,b]$ où $a < b$. Calculer $H(X)$.

(b) Dans cette question, $X$ est une variable aléatoire distribuée selon la Loi Exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Vérifier $X$ admet une entropie égale à $H(X) = 1 - \ln\lambda$.

(c) Dans cette question, $X$ est une variable aléatoire distribuée selon la Loi Normale d'espérance $m$ et d'écart-type $\sigma$. Vérifier que $X$ admet une entropie égale à $H(X) = \dfrac{1+\ln\left(2\pi\sigma^2\right)}{2}$.

## Partie II . Propriétés de l'entropie

**1. Variables discrètes.**

Dans cette question $X$ désigne une variable aléatoire dont l'univers Image est $X(\Omega) = I_n$ ou $\mathbb{N}$ dont la Loi de probabilité est définie par : $\forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = p_k$. Nous supposerons que $X$ admet une entropie égale à $H(X)$.

(a) Montrer que $H(X) \geqslant 0$ puis que $H(X) = 0$ si et seulement si $X$ est une variable presque certaine.

(b) Dans cette question, $X$ est à valeurs dans $I_n$ ; $X_0$ désigne une variable aléatoire distribuée selon la Loi Uniforme sur $I_n$

i. En utilisant le préliminaire, montrer que : $\forall k \in I_n,\ -h(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} - p_k$.

ii. En déduire que $H(X) \leqslant H(X_0)$ puis que $H(X) = H(X_0)$ si et seulement si $X$ suit la Loi Uniforme sur $I_n$.

(c) Dans cette question, $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ ; $X_0$ désigne une variable aléatoire distribuée selon la Loi Géométrique de paramètre $p$ de support $\mathbb{N}$. Nous supposerons également que $X$ admet une espérance $m$ égale à celle de $X_0$.

i. Vérifier que $m$ vaut $\frac{q}{p}$ où $q = 1 - p$.

ii. En utilisant le préliminaire, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ -h\left(p_k\right) + p_k \ln\left(p\right) + kp_k \ln\left(q\right) \leqslant q^k p - p_k$.

iii. En déduire que $H\left(X\right) \leqslant H\left(X_0\right)$ puis que $H\left(X\right) = H\left(X_0\right)$ si et seulement si $X$ suit la Loi Géométrique de paramètre $p$ de support $\mathbb{N}$.

**2. Variables à densité.**

Dans cette question, $X_0$ est une variable aléatoire distribuée selon la Loi Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ d'espérance $m$ et de variance $\sigma^2$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Nous noterons $f_0$ sa densité continue.
$X$ désigne une variable aléatoire de **densité $f$ continue** d'espérance $m$ et de variance $\sigma^2$ dont nous supposerons qu'elle admet une espérance $m$ égale à celle de $X_0$ et possède une entropie $H\left(X\right)$.

(a) Calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) \ln\Big(f_0\left(x\right)\Big)\, \mathrm{d}x$ et vérifier que $H\left(X_0\right) = -I$.

(b) En utilisant le préliminaire, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ -h\left(f\left(x\right)\right) + f\left(x\right) \ln\left(f_0\left(x\right)\right) \leqslant f_0\left(x\right) - f\left(x\right)$.

(c) En déduire que $H\left(X\right) \leqslant H\left(X_0\right)$.

(d) On suppose que $H\left(X\right) = H\left(X_0\right)$.

i. Montrer que : : $\forall x \in \mathbb{R},\ -h\left(f\left(x\right)\right) + f\left(x\right) \ln\left(f_0\left(x\right)\right) = f_0\left(x\right) - f\left(x\right)$.

ii. En déduire que $X$ suit la Loi Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.

***- Fin -***