MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°1
Durée : 2 heures

Remarques préliminaires ***Le but de ce problème est d'obtenir des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ en mettant en évidence des suites dont il est la limite. On pourra utiliser la calculatrice pour calculer des valeurs approchées des termes successifs des suites, mais évidemment pas de $\sqrt{2}$ lui même... On pourra par contre utiliser, en les justifiant, des encadrements usuels comme $1 < \sqrt{2} < 3/2$.***

Partie 1 : première approximation de $\sqrt{2}$

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ par $f : x \mapsto x^2 - 2$; on notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan, B son point d'intersection avec l'axe des abscisses et A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a, où a désigne un réel strictement positif. On supposera de plus que les points A et B sont distincts.

1. Montrer qu'on peut définir par récurrence une suite $\left(M_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :
- ⋆ M_0 est un point quelconque de $\mathcal{C}$, distinct de A et de B.
- ⋆ Pour tout entier naturel n, M_{n+1} est le point de $\mathcal{C}$ de même abscisse que le point d'intersection de l'axe des abscisses $\left(Ox\right)$ avec la droite $\left(A\,M_n\right)$.

On notera u_n l'abscisse de M_n et u la suite de terme général u_n.
Montrer que l'on a pour tout entier naturel n, la relation :

$$u_{n+1} = \frac{2 + a\,u_n}{a + u_n}$$

2. (a) Justifier, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a - \sqrt{2}}{a + u_n} \times \left(u_n - \sqrt{2}\right)$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n :

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right| \times \left|u_n - \sqrt{2}\right|$$

puis que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times \left|u_0 - \sqrt{2}\right|$

(c) Comment choisir a pour pouvoir en déduire que la suite u converge ? On précisera sa limite.

3. Dans cette question on suppose : $a = 1$, $u_0 = 2$.

(a) Montrer qu'on a pour tout entier naturel n non nul : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

En déduire un rang n_0 à partir duquel u_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.
Justifier l'encadrement $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.

(b) Cette question est destinée à préciser la rapidité de convergence de la suite u. Pour cela on considère la suite v, définie pour tout entier naturel n, par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$$

Montrer que c'est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le terme de rang 0.
En déduire : $v_n = (-1)^n \left(1 - \sqrt{2}\right)^{2n+2}$
puis la majoration : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 4 \times (0,3)^{n+1}$
On dira que la convergence de u vers sa limite est géométrique.

(c) **Écrire le script d'une fonction qui fournisse le terme de rang n de la suite u.**

Partie 2 : la méthode de Newton (algorithme de Babylone)

On reprend la courbe $\mathcal{C}$ définie à la partie précédente.

1. (a) Montrer qu'il est possible de définir une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les deux conditions :

⋆ a_0 est un réel strictement positif.

⋆ a_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe $\big(Ox\big)$ avec la tangente à $\mathcal{C}$ en P_n, P_n désignant le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a_n.

(b) On considère la fonction g, définie pour tout réel strictement positif par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(c) Montrer que, pour n non nul, a_n est supérieur ou égal à $\sqrt{2}$. En déduire qu'à partir du rang 1, la suite a est décroissante et qu'elle admet une limite réelle.
Vérifier que cette limite est $\sqrt{2}$.

2. Cette question est destinée à préciser la rapidité de convergence de la suite a. Pour cela, on prend $a_0 = 1,5$ et on considère la suite b définie pour tout n entier naturel par : $b_n = \dfrac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$.

(a) Justifier la relation $b_{n+1} = {b_n}^2$ pour tout entier naturel n. Déterminer une expression de b_n en fonction de n et de b_0.

(b) Vérifier $b_0 \leqslant 0,04$.

(c) En déduire l'encadrement $0 < a_n - \sqrt{2} \leqslant 3,5 \times (0,04)^{2^n}$.
On dira que la convergence de a est quadratique.

(d) En déduire un rang n_1 à partir duquel a_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

(e) **Écrire le script d'une fonction qui fournisse le terme de rang n de la suite a.**

Partie 3 : Un problème de point fixe.

Dans cette partie, on se propose de généraliser certains résultats mis en évidence dans les parties précédentes. On considère une fonction φ, de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $I = [a, b]$. On note m un réel tel que, pour tout x de I, on ait $|\varphi'(x)| \leqslant m$, et on supposera que m est un réel strictement inférieur à 1. Enfin on supposera qu'il existe $\alpha \in I$ vérifiant la condition :

$$\varphi(\alpha) = \alpha$$

On se propose de trouver des valeurs approchées de α comme limite d'une suite. On définit la suite u par récurrence de la façon suivante :

⋆ u_0 est élément d'un intervalle centré en α et inclus dans I.

⋆ Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

- En utilisant convenablement l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n, u_n est élément de I et justifier la relation : $|u_n - \alpha| \leqslant (m)^n\,|u_0 - \alpha|$.
- Conclure quant à la convergence de la suite u.