Corrigé du devoir surveillé n^{o}5

Exercice

1. $\forall u \geqslant 0,\ f(u) = \dfrac{u}{2\,(1+u^2)} \times \left(1+u^2-2\,u\right) = \dfrac{u\,(u-1)^2}{2\,(1+u^2)}$ $\boxed{\text{donc } f(u)=0 \iff u=0 \text{ ou } u=1.}$

2. D'après le calcul précédent, $\forall u \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ f(u) \neq 0$ donc $\dfrac{1}{f(u)}$ existe et vaut $\dfrac{1}{f(u)} = \dfrac{2\,(1+u^2)}{u\,(u-1)^2}$

   $\forall u \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ \dfrac{A}{u}+\dfrac{B}{(u-1)^2}+\dfrac{C}{u-1} = \dfrac{A\,(u-1)^2+B\,u+C\,u\,(u-1)}{u\,(u-1)^2} = \dfrac{(A+C)\,u^2+(B-C-2\,A)\,u+A}{u\,(u-1)^2}$

   On a donc $\forall u \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ \dfrac{2\,u^2+2}{u\,(u-1)^2} = \dfrac{(A+C)\,u^2+(B-C-2\,A)\,u+A}{u\,(u-1)^2}$

   D'où, par identification des coefficients des numérateurs, $A=2$, puis $A+C=2$, donc $C=0$ et enfin $B-C-2\,A=0$ donc $B=4$.

   Réciproquement, on vérifie que pour $A=2$, $B=4$ et $C=0$, on a bien l'égalité demandée.

   $$\boxed{\forall u \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ \frac{1}{f(u)} = \frac{2}{u}+\frac{4}{(u-1)^2}}$$

3. (a) $\star\,\forall y \in \left[\dfrac{1}{2},1\right[,\ G(y) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{y} \left(\frac{2}{u}+\frac{4}{(u-1)^2}\right)\mathrm{d}u = \left[2\,\ln u - \frac{4}{u-1}\right]_{\frac{1}{2}}^{y} = 2\,\ln(2\,y)+\frac{4}{1-y}-8$

   $\star\,\forall y \in \left[\dfrac{3}{2},+\infty\right[,\ H(y) = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{y} \left(\frac{2}{u}+\frac{4}{(u-1)^2}\right)\mathrm{d}u = \left[2\,\ln u - \frac{4}{u-1}\right]_{\frac{3}{2}}^{y} = 2\,\ln\left(\frac{2\,y}{3}\right)-\frac{4}{y-1}+8$

   (b) $\star\,G$ est *la* primitive de $\dfrac{1}{f}$ qui s'annule pour $y=\dfrac{1}{2}$, donc $\forall y \in \left[\dfrac{1}{2},1\right[,\ G'(y) = \dfrac{1}{f(y)} = \dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{(y-1)^2}$.

   Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right[$, G' est donc strictement positive, on en déduit que G est strictement croissante.

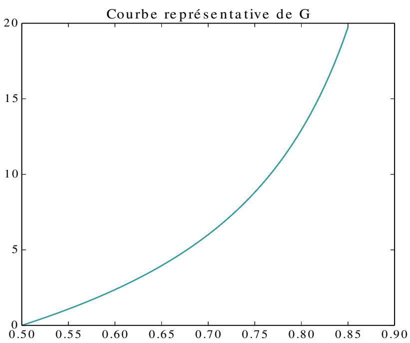
   $\star$ De même, H est *la* primitive de $\dfrac{1}{f}$ qui s'annule pour $y=\dfrac{3}{2}$, donc $\forall y \in \left[\dfrac{3}{2},+\infty\right[,\ H'(y) = \dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{(y-1)^2}$.

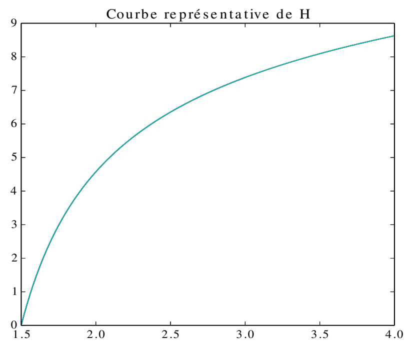
   H est donc strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$.

   (c) $\star\,G$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$, strictement croissante, $G\left(\frac{1}{2}\right)=0$ et $\lim\limits_{y\to 1} G(y) = +\infty$, donc G réalise une bijection de l'intervalle $I=\left[\frac{1}{2},1\right[$ vers $G(I)=[0,+\infty[$.

   $\star$ De même, H est continue sur $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$, strictement croissante, $H\left(\frac{3}{2}\right)=0$ et $\lim\limits_{y\to 1} H(y) = +\infty$, donc H réalise une bijection de l'intervalle $J=\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$ vers $H(J)=[0,+\infty[$.

   (d)





4. (a) G^{-1} est définie sur $[0,+\infty[$, à valeurs dans $\left[\frac{1}{2},1\right[$, strictement croissante ; et $\forall y \in \left[\dfrac{1}{2},1\right[,\ G^{-1}\circ G(y) = y$

   Donc $\forall x \geqslant 0,\ \left(G^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{G'\left(G^{-1}(x)\right)}$ et d'autre part, pour tout $y \in \left[\dfrac{1}{2},1\right[,\ G'(y) = \dfrac{1}{f(y)}$, d'où en posant $y = G^{-1}(x)$

$$\left(G^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f(y)} = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{1+y^2} = \frac{G^{-1}(x)}{2} - \frac{\left(G^{-1}(x)\right)^2}{1+\left(G^{-1}(x)\right)^2}$$

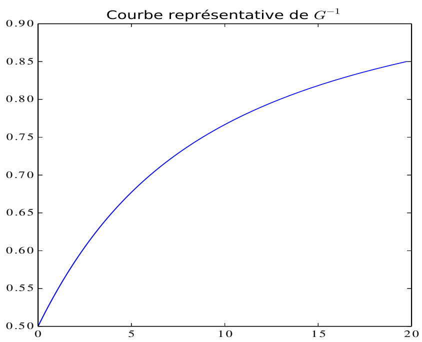
On en déduit que G^{-1} est solution de l'équation différentielle sur $[0,+\infty[$ et on remarque que $G^{-1}(0) = \frac{1}{2}$.
Soit φ une solution de cette équation différentielle sur I, telle que $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.
On étudie les variations de la fonction $H = \dfrac{\varphi}{G^{-1}}$ qui est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, puisque G^{-1} est à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ donc ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$:

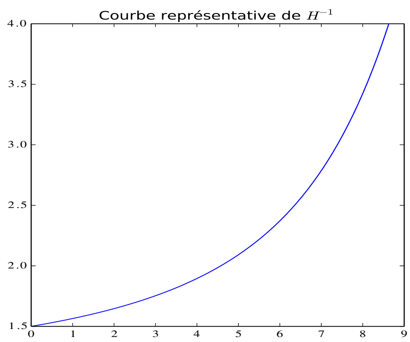
$$\forall x \geqslant 0,\ H'(x) = \left(\frac{\varphi}{G^{-1}}\right)'(x) = \frac{\varphi'(x)}{G^{-1}(x)} - \frac{\varphi(x)\left(G^{-1}\right)'(x)}{\left(G^{-1}(x)\right)^2} = \frac{\frac{\varphi(x)}{2} - \frac{\varphi^2(x)}{1+\varphi^2(x)}}{G^{-1}(x)} - \frac{\varphi(x)\left(\frac{G^{-1}(x)}{2} - \frac{\left(G^{-1}(x)\right)^2}{1+\left(G^{-1}(x)\right)^2}\right)}{\left(G^{-1}(x)\right)^2} = 0$$

La fonction H est donc constante sur $\mathbb{R}^+$ et $H(0) = \dfrac{\varphi(0)}{G^{-1}(0)} = 1$, donc H est constante égale à 1 ; on en déduit : $\forall x \geqslant 0,\ \varphi(x) = G^{-1}(x)$, donc G^{-1} est bien l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Les calculs sont identiques pour H^{-1}

(c)





Problème

Partie 1

1. • Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $A\,X=\lambda\,X$ équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\,x & + & y & - & z & = & \lambda\,x\\ 2\,x & + & 4\,y & - & 2\,z & = & \lambda\,y\\ x & - & y & + & 3\,z & = & \lambda\,z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & (3-\lambda)z & = & 0 & \\ (5-\lambda)x & + & y & - & z & = & 0 & L_2\leftarrow L_2+(\lambda-5)\,L_1\\ 2\,x & + & (4-\lambda)y & - & 2\,z & = & 0 & L_3\leftarrow L_3-2\,L_1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} x-y+(3-\lambda)z= & 0 & \\ (6-\lambda)y-(\lambda^2-4)^2z= & 0 & L_2\leftarrow L_3\\ (6-\lambda)y+2\,(\lambda-4)z= & 0 & L_3\leftarrow L_3-L_2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x-y+(3-\lambda)z= & 0\\ (6-\lambda)y+2\,(\lambda-4)z= & 0\\ (\lambda-2)\,(\lambda-4)\,z= & 0\end{array}\right.$$

⋆ Si $\lambda=2$ ou 4, la dernière équation est toujours vérifiée et le système équivaut à

Pour $\lambda=2$: $\left\{\begin{array}{ll} x-y+z & =0\\ 4\,y-4\,z & =0\end{array}\right.$ et pour $\lambda=4$: $\left\{\begin{array}{ll} x-y-z & =0\\ 2\,y & =0\end{array}\right.$

$\boxed{\text{L'ensemble } E_2 \text{ des solutions de } A\,X=2\,X \text{ est } E_2=\{{}^t(0,x,x),\ x\in\mathbb{R}\}}$

$\boxed{\text{L'ensemble } E_4 \text{ des solutions de } A\,X=4\,X \text{ est } E_4=\{{}^t(x,0,x),\ x\in\mathbb{R}\}}$

⋆ Si $\lambda=6$, les deux dernières équations sont équivalentes donc $(\mathcal{S}) \iff \left\{\begin{array}{ll} x-y-3\,z & =0\\ 4\,z & =0\end{array}\right.$

$\boxed{\text{L'ensemble } E_6 \text{ des solutions de } A\,X=6\,X \text{ est } E_6=\{{}^t(x,x,0),\ x\in\mathbb{R}\}}$

Enfin si $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{2,4,6\}$, la troisième équation donne $z=0$, puis en reportant dans la deuxième, $y=0$ et enfin $x=0$; donc pour $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{2,4,6\}$, l'ensemble E_λ des solutions de $A\,X=\lambda X$ est réduit à $\{{}^t(0,0,0)\}$.

• Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $B\,X=\lambda\,X$ équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & & & + & z & = & \lambda\,x\\ -x & + & y & - & z & = & \lambda\,y\\ x & + & 2\,y & & & = & \lambda\,z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\,y & - & \lambda\,z & + & x & = & 0 & \\ (1-\lambda)y & - & z & - & x & = & 0 & L_2\leftarrow(1-\lambda)\,L_1-2\,L_2\\ & & z & + & (2-\lambda)x & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} 2\,y-\lambda\,z+x= & 0 & \\ (\lambda^2-\lambda+2)z+(3-\lambda)\,x= & 0 & L_2\leftarrow L_3\\ z+(2-\lambda)\,x= & 0 & L_3\leftarrow(\lambda^2-\lambda+2)\,L_3-L_2\end{array}\right.$$

$(\mathcal{S}) \iff \left\{\begin{array}{rl} 2\,y-\lambda\,z+x= & 0\\ z+(2-\lambda)\,x= & 0\\ (1-\lambda)^3\,x= & 0\end{array}\right.$ Pour $\lambda=1$ la troisième équation est toujours vérifiée et le système équivaut à $\left\{\begin{array}{rl} 2\,y-z+x= & 0\\ z+x= & 0\end{array}\right.$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } B\,X=X \text{ est } E'_1=\{{}^t(-x,x,x),\ x\in\mathbb{R}\}}$

⋆ Si $\lambda\neq1$, la troisième équation donne $x=0$, puis successivement $z=0$ (deuxième équation) et $y=0$. Donc pour $\lambda\neq1$, l'ensemble E'_λ des solutions de $B\,X=\lambda X$ est réduit à $\{{}^t(0,0,0)\}$.

• Pour $\lambda\in\{2,4,6\}$, l'ensemble des solutions de $A\,X=\lambda\,X$ est une droite vectorielle, donc le rang de $A-\lambda\,I$ est égal à 2 et λ est une valeur propre de A (et aussi de f puisque A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$). Pour $\lambda\notin\{2,4,6\}$, l'ensemble des solutions de $A\,X=\lambda\,X$ est réduit au vecteur nul donc $A-\lambda\,I$ est inversible et λ n'est pas valeur propre de A (donc de f).

$\boxed{\text{2, 4 et 6 sont les 3 valeurs propres de } f \text{ et les espaces propres associés sont de dimension 1.}}$

• Pour $\lambda=1$, l'ensemble des solutions de $B\,X=\lambda\,X$ est une droite vectorielle, donc le rang de $B-\lambda\,I$ est égal à 2 et λ est une valeur propre de B (et aussi de g).
Pour $\lambda\neq1$, l'ensemble des solutions de $B\,X=\lambda\,X$ est réduit au vecteur nul donc B (et par conséquent g) n'a pas d'autre valeur propre que 1.

$\boxed{\text{1 est l'unique valeur propre de } g \text{ et l'espace propre associé est de dimension 1.}}$

2. A admet 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable ; B admet une seule valeur propre et l'espace propre associé est de dimension < 3 donc B n'est pas diagonalisable.

3. Les vecteurs $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ sont des vecteurs propres associés à 2, 4 et 6 respectivement, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$ et on peut choisir $\varepsilon_1 = (0,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,0,1)$ et $\varepsilon_1 = (1,1,0)$.

   Dans cette base, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

   Le vecteur $(-1,1,1)$ est propre pour g, associé à la valeur 1, donc on peut choisir $\varepsilon_1' = (-1,1,1)$; on cherche alors un vecteur $\varepsilon_2' = (x,y,z)$, non colinéaire à ε_1', tel que $g(\varepsilon_2') = \alpha\,\varepsilon_2' + \beta\,\varepsilon_1'$, c'est à dire $(g - \alpha\,\mathrm{Id})(\varepsilon_2') = \beta\,\varepsilon_1'$. D'après l'étude précédente, si $\alpha \neq 1$ alors $g - \alpha\,\mathrm{Id}$ est injective (et donc bijective), ainsi il existe un unique vecteur –β étant donné– dont l'image par $g - \alpha\,\mathrm{Id}$ est égale à $\beta\,\varepsilon_1'$. Ce vecteur est bien sûr $\beta\,\varepsilon_1'$ puisque ε_1' est invariant par g. Par conséquent l'équation $(g - \alpha\,\mathrm{Id})(\varepsilon_2') = \beta\,\varepsilon_1'$ ne peut avoir de solutions que si $\alpha = 1$. On obtient alors le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & & & + & z & = & -\beta & \\ -x & & & - & z & = & \beta & \\ x & + & 2y & - & z & = & \beta & L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x+z & = & -\beta \\ 2x+2y & = & 0 \end{array}\right.$$
   Il faut bien sûr $\beta \neq 0$ sinon on retombe sur un vecteur colinéaire à ε_1' ; on choisit par exemple $\beta = 1$ et $x = -1$, donc $\varepsilon_2' = (-1,1,0)$.
   On cherche enfin un vecteur $\varepsilon_3' = (x,y,z)$ tel que la famille $\langle \varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3' \rangle$ soit libre et que $g(\varepsilon_3') = \gamma\,\varepsilon_3' + \delta\,\varepsilon_2' + \mu\,\varepsilon_1'$. On a donc $(g - \gamma\,\mathrm{Id})(\varepsilon_3') = \delta\,\varepsilon_2' + \mu\,\varepsilon_1'$ et si $\gamma \neq 1$, le seul antécédent par $g - \gamma\,\mathrm{Id}$ de $\delta\,\varepsilon_2' + \mu\,\varepsilon_1'$ est $\delta\,\varepsilon_2' + (\delta + \mu)\,\varepsilon_1'$. Pour que la famille $\langle \varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3' \rangle$ soit libre, il est donc nécessaire d'avoir $\gamma = 1$. On obtient alors le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & & & + & z & = & -\delta - \mu & \\ -x & & & - & z & = & \delta + \mu & \\ x & + & 2y & - & z & = & \mu & L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x+z & = & -\delta - \mu \\ 2x+2y & = & -\delta \end{array}\right.$$
   On choisit $x = 1$, $\delta = -2$ et $\mu = 0$, alors $\varepsilon_3' = (1,0,1)$ et on a : $g(\varepsilon_1') = \varepsilon_1'$, $g(\varepsilon_2') = \varepsilon_2' + \varepsilon_1'$, $g(\varepsilon_3') = \varepsilon_3' - 2\,\varepsilon_2'$.

4. $\varepsilon_1 = (0,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,0,1)$ et $\varepsilon_1 = (1,1,0)$ d'où $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   $\varepsilon_1' = (-1,1,1)$, $\varepsilon_2' = (-1,1,0)$, $\varepsilon_3' = (1,0,1)$, $Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie 2

1. Le système $(\mathcal{S})$ s'écrit sous forme matricielle $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -t\,e^t \end{bmatrix}$ $(\star)$, donc $(\mathcal{S})$ est bien équivalent à (E) puisque A est la matrice de f dans la base canonique.

2. (a) Par la formule de changement de base $\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix}$ puis $\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix}$ car P ne dépend pas de t.

   $(\star)$ s'écrit alors $P \begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix} = A\,P \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -t\,e^t \end{bmatrix}$ qui, en multipliant à gauche par P^{-1}, équivaut à

   $$\begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{P^{-1}\,A\,P}_{D} \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} + P^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -t\,e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,a'(t) \\ 4\,b'(t) \\ 6\,c'(t) \end{bmatrix} + P^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -t\,e^t \end{bmatrix}$$

   (b) $$(\mathcal{S}') \iff \forall t \in \mathbb{R} \left\{\begin{array}{ll} a'(t) = 2\,a(t) - \frac{1}{2}\,e^t + \frac{1}{2}\,e^{2t} - \frac{1}{2}\,t\,e^t & (1) \\ b'(t) = 4\,b(t) + \frac{1}{2}\,e^t - \frac{1}{2}\,e^{2t} - \frac{1}{2}\,t\,e^t & (2) \\ c'(t) = 6\,c(t) + \frac{1}{2}\,e^t + \frac{1}{2}\,e^{2t} + \frac{1}{2}\,t\,e^t & (3) \end{array}\right.$$

On obtient 3 équations différentielles linéaires à coefficients constants, que l'on résout :
(1) : la solution générale de l'équation sans second membre associée est $a\,:\,t \mapsto K\,e^{2\,t}$ où $K \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation complète sous la forme $a_p\,:\,t \mapsto \alpha\,e^t + \beta\,t\,e^{2\,t} + \gamma\,t\,e^t$, où α, β, γ sont des réels à déterminer (réviser si nécessaire le cours de première année) : $\forall t \in \mathbb{R}$, $a'(t) = \alpha\,e^t + \beta\,e^{2\,t} + 2\,\beta\,t\,e^{2\,t} + \gamma\,t\,e^t + \gamma\,e^t$ et par identification : $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \dfrac{1}{2}$. La solution générale de (1) est donc $a : t \mapsto K\,e^{2\,t} + e^t + \dfrac{t}{2}\,e^{2\,t} + \dfrac{t}{2}\,e^t$
(2) et (3) : de même que pour la première équation, les solutions générales des équations sans second membre associées sont $b : t \mapsto S\,e^{4\,t}$ et $c : t \mapsto R\,e^{6\,t}$ où $(S, R) \in \mathbb{R}^2$ sont des réels quelconques. On cherche ensuite des solutions particulières des équations complètes sous la forme $b_p\,:\,t \mapsto \alpha'\,e^t + \beta'\,e^{2\,t} + \gamma'\,t\,e^t$ et $c_p\,:\,t \mapsto \alpha''\,e^t + \beta''\,e^{2\,t} + \gamma''\,t\,e^t$. Par identification, on obtient :
pour (2) $b : t \mapsto S\,e^{4\,t} - \dfrac{1}{9}\,e^t + \dfrac{1}{4}\,e^{2\,t} + \dfrac{t}{6}\,e^t$ et pour (3) $c : t \mapsto R\,e^{6\,t} - \dfrac{3}{25}\,e^t - \dfrac{1}{8}\,e^{2\,t} - \dfrac{t}{10}\,e^t$.
On a $\begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ donc en particulier $\begin{bmatrix} a(0) \\ b(0) \\ c(0) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{a(0) = \frac{1}{2}\,, \quad b(0) = \frac{1}{2}\,, \quad c(0) = \frac{-1}{2}}$$

3. $a(0) = \dfrac{1}{2} = K\,e^0 + e^0 + 0$ d'où $K = -\dfrac{1}{2}$, $\quad b(0) = \dfrac{1}{2} = S\,e^0 - \dfrac{1}{9}\,e^0 - \dfrac{1}{4}\,e^0 + 0$ d'où $S = \dfrac{13}{36}$ et $c(0) = -\dfrac{1}{2} = R\,e^0 - \dfrac{3}{25}\,e^0 - \dfrac{1}{8}\,e^0 + 0$ d'où $R = -\dfrac{51}{100}$.

$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &= -\frac{1}{2}\,e^{2\,t} + e^t + \frac{t}{2}\,e^{2\,t} + \frac{t}{2}\,e^t \\ b(t) &= \frac{13}{36}\,e^{4\,t} - \frac{1}{9}\,e^t + \frac{1}{4}\,e^{2\,t} + \frac{t}{6}\,e^t \\ c(t) &= -\frac{51}{100}\,e^{6\,t} - \frac{3}{25}\,e^t - \frac{1}{8}\,e^{2\,t} - \frac{t}{10}\,e^t \end{aligned}}$$

On obtient finalement les valeurs de u, v, w en multipliant à nouveau par la matrice P :
$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} b(t) + c(t) \\ a(t) + c(t) \\ a(t) + b(t) \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= \frac{13}{72}\,e^{4\,t} - \frac{51}{200}\,e^{6\,t} - \frac{26}{225}\,e^t + \frac{1}{16}\,e^{2\,t} + \frac{t}{30}\,e^t \\ v(t) &= -\frac{51}{200}\,e^{6\,t} + \frac{11}{25}\,e^t - \frac{5}{16}\,e^{2\,t} + \frac{t}{4}\,e^{2\,t} + \frac{2\,t}{10}\,e^t \\ w(t) &= \frac{13}{72}\,e^{4\,t} + \frac{4}{9}\,e^t - \frac{1}{8}\,e^{2\,t} + \frac{t}{3}\,e^t \end{aligned}}$$

Partie 3

1. Le système $(\mathcal{S}_1)$ s'écrit sous forme matricielle $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ $(\star\star)$ donc $(\mathcal{S}_1)$ est équivalent à (E_1) puisque B est la matrice de g dans la base canonique.

2. (a) Par la formule de changement de base $\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix}$ car Q ne dépend pas de t.
$(\star\star)$ s'écrit $Q \begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix} = B\,Q \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix}$ qui, par produit à gauche par Q^{-1}, équivaut à $\begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{Q^{-1}\,B\,Q}_{T} \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix}$

(b) $(\mathcal{S}_1') \iff \forall t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{ll} a'(t) = a(t) + b(t) & (1) \\ b'(t) = b(t) - 2\,c(t) & (2) \\ c'(t) = c(t) & (3) \end{array} \right.$

On obtient 3 équations différentielles linéaires à coefficients constants, que l'on résout :

(3) la solution générale est $c : \, t \mapsto \alpha\, e^t$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque.

(2) l'équation devient $\forall t \in \mathbb{R}\ b'(t) = b(t) - 2\,\alpha\, e^t$ dont une solution particulière est de la forme : $b_p : \, t \mapsto \beta\, t\, e^t$ Par identification , on obtient $\beta = -2\,\alpha$ donc la solution générale est $b : \, t \mapsto -2\,\alpha\, te^t + \gamma\, e^t$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque.

(1) l'équation devient $\forall t \in \mathbb{R}\ a'(t) = a(t) - 2\,\alpha\, t\, e^t + \gamma\, e^t$ dont une solution particulière est de la forme : $a_p \, : \, t \mapsto (\delta\, t^2 + \varepsilon\, t)\, e^t$. Par identification , on obtient $\varepsilon = \gamma$ et $\delta = -\alpha$ donc la solution générale est $a : \, t \mapsto \big(-\alpha\, t^2 + \gamma\, t + \nu\big)\, e^t$ où $\nu \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque.

On a $\begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ donc en particulier $\begin{bmatrix} a(0) \\ b(0) \\ c(0) \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\boxed{a(0) = -\,2 = \nu, \quad b(0) = 4 = \gamma \text{ et } c(0) = 3 = \alpha}$$

(c) On obtient donc les fonctions a, b et c pour tout $t \in R$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a(t) = & \big(-\,3\,t^2 + 4\,t - 2\big)\, e^t \\ b(t) = & \big(-\,6\,t + 4\big)\, e^t \\ c(t) = & 3\, e^t \end{array}}$$

Puis finalement les valeurs de u, v, w en multipliant à nouveau par la matrice Q :

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a(t) - b(t) + c(t) \\ a(t) + b(t) \\ a(t) + c(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(t) = & \big(3\,t^2 + 2\,t + 1\big)\, e^t \\ v(t) = & \big(-\,3\,t^2 - 2\,t + 2\big)\, e^t \\ w(t) = & \big(-\,3\,t^2 + 4\,t + 1\big)\, e^t \end{array}}$$