Mon premier document LaTeX

Sébastien Combéfis

28 novembre 2009

Table des matières

1 La factorielle

La factorielle est une fonction mathématique définie sur les entiers positifs. Elle se note $n!$ et se lit « factorielle de n » ou tout simplement « factorielle n ». Elle correspond au produit des nombres entiers strictement positifs et plus petit ou égal à n.

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n \tag{1}$$

La fonction est également définie pour 0 et par convention, on a $n! = 0$ [1]. Grâce à cette convention, il est possible de donner une *définition récursive* de la factorielle, donnée à l'équation 2.

$$n! = \begin{cases} 0 & \text{, si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{, sinon} \end{cases} \tag{2}$$

La factorielle est une fonction strictement croissante. Ses valeurs augmentent très vites comme vous pouvez l'observer dans le tableau 1.

n			$n!$
0			1
1	1	$=$	1
2	1×2	$=$	2
3	$1 \times 2 \times 3$	$=$	6
4	$1 \times 2 \times 3 \times 4$	$=$	24
5	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$	$=$	120
6	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$	$=$	720

Table 1 – Premières valeurs de la fonction factorielle.

On peut facilement voir la croissance de la factorielle grâce au graphe de la fonction. La figure 1 en page 2 montre le graphe de la fonction. En bleu la fonction factorielle et en rouge, la fonction exponentielle. L'axe des y est en échelle logarithmique. La courbe bleue a en fait été dessinée grâce à la fonction de Stirling qui est expliquée en section 1.2.

1. Étant donné que 0! correspond au produit vide, la convention a du sens étant donné que 1 est le neutre de la multiplication.

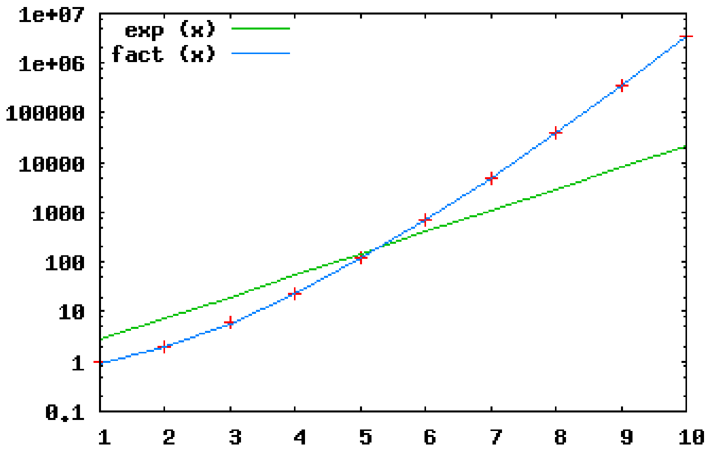

FIGURE 1 – Graphe de la fonction factorielle.

1.1 Algorithme

On peut facilement écrire un algorithme récursif qui permet de calculer la factorielle d'un entier. Voici une algorithme possible en pseudo-code :

```
fact (n)
{
    if (n = 0)
    {
        return 1;
    }
    else
    {
        return n * fact (n - 1);
    }
}
```

On peut également écrire une version itérative de l'algorithme :

```
fact (n)
{
    result = 1;
    while (n > 1)
    {
        result = result * n;
        n = n - 1;
    }
    return result;
}
```

1.2 Approximation de la factorielle

On peut approximer la valeur de la factorielle pour des grandes valeurs de n en exploitant la formule de Stirling :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1 \tag{3}$$

Et donc, lorsque n devient grand, on peut écrire que :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{4}$$