Graphes pondérés, graphes probabilistes

Terminale ES (enseignement de spécialité)
Lycée Charles PONCET

Février 2014

Table des matières

Le symbole ✎ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Graphes étiquetés et graphes pondérés

1.1 Graphes étiquetés

Définition 1.1.1
Un graphe étiqueté *est un graphe dont les arêtes sont munies d'une* étiquette*.*
Une étiquette *est un nombre, une lettre, un mot (ensemble de lettres), un symbole...*

☛ Le plus souvent, un graphe étiqueté est orienté. On peut alors définir un sommet « départ » et un sommet « fin ».

✎ Construire des graphes étiquetés dont les étiquettes sont des lettres, des mots, des nombres.

Définition 1.1.2 (reconnaissance de mots)
Un mot est reconnu par un graphe étiqueté orienté lorsqu'il est composé des étiquettes d'une chaîne orientée dont le sommet initial est le sommet « départ » et le sommet final, le sommet « fin ».

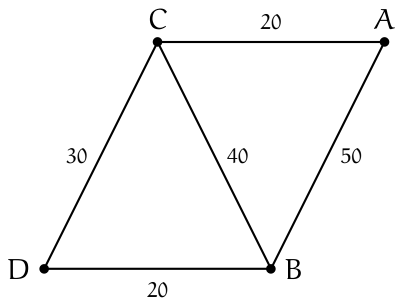
✎ Exercice n° 28 page 80.

1.2 Graphes pondérés

Définition 1.2.1
Un graphe pondéré *est graphe étiqueté dont les étiquettes sont des nombres positifs.*
Le nombre associé à une arête est le poids *de l'arête.*
Le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes constituant cette chaîne.

Exemple

Le graphe ci-dessous représente un réseau autoroutier, les étiquettes correspondent au prix des péages entre deux étapes.



a. Énumérer tous les chemins possibles reliant D et A, en ne passant jamais deux fois par le même sommet.
b. Calculer le poids de toutes les chaînes trouvées.
   En déduire le chemin dont le poids est minimal.

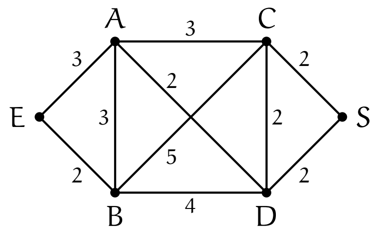
1.3 Algorithme de DIJKSTRA

Définition 1.3.1
Une plus courte chaîne *ou un* plus court chemin *entre deux sommets est, parmi les chaînes qui relie ces deux sommets, une chaîne de poids minimum.*

L'algorithme de DIJKSTRA permet de trouver tous les plus courts chemins entre deux sommets.

Algorithme

On illustre l'algorithme avec le graphe ci-dessous, où il s'agit de trouver le plus court chemin entre les sommets E et S.



Initialisation et 1re ligne

- On dresse un tableau avec un colonne pour chaque sommet, et une colonne supplémentaire pour indiquer le sommet sélectionné.
- Sur la première ligne du tableau, on affecte le coefficient 0 à l'origine E, et le coefficient ∞ aux autres sommets.

2e ligne

- On sélectionne le sommet de plus petit coefficient : il s'agit du sommet E. On raye toutes les autres cases de la colonne E en tirant un trait vertical.
- Pour chaque sommet adjacents à E, on calcule le coefficient affecté à ce sommet.

  Les sommets adjacents à E sont A et B.

  Pour le sommet A :
  - On calcule la somme du coefficient du sommet E (ici 0) et du poids de l'arête E—A dans le graphe (ici 3), on obtient $0 + 3 = 3$.
  - On compare cette somme au coefficient précédent de A (∞) et on affecte à A le plus petit des deux nombres, soit 3.
  - On écrit dans le tableau 3 ou $3(E)$ ou 3_E pour rappeler que le sommet depuis lequel on est arrivé en A est E.

  Pour le sommet B on procède de même et on note $2(E)$.
- Pour chaque sommet non adjacent à E, on reporte les coefficients de la ligne précédente : pour C, D et S on réécrit le coefficient ∞.

On a ainsi rempli toute une ligne du tableau.

Lignes suivantes

- On sélectionne le sommet de plus petit coefficient non encore traité, et on procède de même avec ce sommet.

On remplit ainsi, de proche en proche, chacune des lignes suivantes. On s'arrête lorsque tous les sommets ont été sélectionnés.

Lecture du tableau

- On obtient un plus court chemin entre E et S en l'écrivant de droite à gauche, de la manière suivante : dans la colonne « S », on repère le sommet inscrit le plus en bas, c'est-à-dire D ; puis, dans la colonne « D », le sommet inscrit le plus en bas, A ; puis dans la colonne « A », le sommet inscrit le plus en bas, c'est-à-dire E.

  On obtient E—A—D—S.
  Le poids du plus court chemin est égal au dernier coefficient de S dans le tableau, ici, 7.

☛ Cet algorithme permet également d'obtenir la plus courte chaîne, et son poids, entre E et chacun des autres sommets pouvant être reliés à E.
Par exemple, la plus courte chaîne entre E et D est E—A—D, son poids est le dernier coefficient de D, c'est-à-dire 5.

E	A	B	C	D	S	Sommet sélectionné

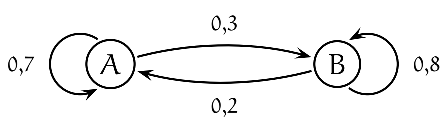
2 Graphes probabilistes

2.1 Définition

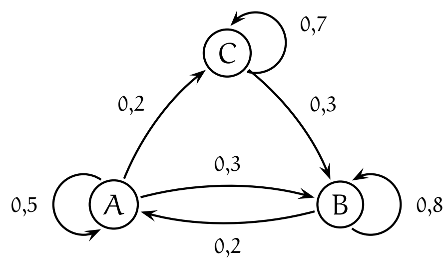
Définition 2.1.1
Un graphe probabiliste *est un graphe orienté, pondéré, tel que la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet vaut* 1*.*

☛ On utilise les graphes probabilistes pour modéliser les phénomèmes dont les états changent aléatoirement.
Les sommets du graphes sont les états possibles du phénomène.
Le poids de l'arête orientée issue du sommet i et d'extrémité le sommet j est la probabilité de passer de l'état i à l'état j.
Une absence d'arête revient à une arête de poids 0.

Exemples



Graphe probabiliste à deux états A et B



Graphe probabiliste à trois états A, B et C

2.2 Matrice de transition d'un graphe probabiliste

Définition 2.2.1
*L'*état probabiliste *est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles : cette loi est représentée par une matrice ligne.*

☛ Pour un graphe probabiliste à deux états, l'état probabiliste à l'étape n est représenté par la matrice ligne $\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ avec $q_n = 1 - p_n$. On peut donc le représenter par $\begin{pmatrix} p_n & 1 - q_n \end{pmatrix}$.
L'état initial s'écrira $\begin{pmatrix} p_0 & 1 - q_0 \end{pmatrix}$.

Pour un graphe probabiliste à trois états, l'état probabiliste à l'étape n est représenté par la matrice ligne $\begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$ avec $p_n + q_n + r_n = 1$.

Définition 2.2.2
La matrice de transition *d'un graphe probabiliste d'ordre* n *est une matrice carrée d'ordre* n.
Le coefficient situé à la i^e *ligne et à la* j^e *colonne est égal au poids de l'arête orientée allant du sommet* i *au sommet* j *si cette arête existe,* 0 *sinon.*

☛ Pour une matrice de transition, chaque coefficient est un nombre de $[0\ ;\ 1]$ et la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

⇒ Déterminer les matrices de transition des graphes probabilistes donnés en exemple dans le paragraphe précédent (les sommets seront numérotés dans l'ordre alphabétique).

2.3 Propriétés des graphes probabilistes

Propriété 2.3.1
Soit un graphe probabiliste dont la matrice de transition est M.
Si P_0 *est la matrice ligne décrivant l'état initial et* P_n *est la matrice décrivant l'état à l'étape* n*, alors :*

$$P_{n+1} = P_n \times M$$
$$\textit{et}\ \ P_n = P_0 \times M^n.$$

Théorème 2.3.2 (existence d'un état stable)
Si la matrice de transition M *d'un graphe probabiliste d'ordre* 2 *ou* 3 *ne comporte pas de* 0*, l'état* P_n *à l'étape* n*, tend vers un état* P *indépendant de l'état initial* P_0 *lorsque* n *devient grand.*

P *est appelé* état stable *du graphe et vérifie* $P = P \times M$.

☛ Pour un graphe probabiliste d'ordre 2, si $P = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$ est l'état stable alors $p + q = 1$.

⇒ Justifier que le graphe probabiliste d'ordre 2 précédent possède un état stable et déterminer cet état stable.

Généralisation

Théorème 2.3.3
Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 *ou* 3 *dont la matrice de transition est* M.
Si M *possède un ou plusieurs coefficients nuls, pour qu'il y ait un état stable, il suffit qu'une puissance de* M *ne comporte pas de* 0.