Terminale ES_1 (enseignement de spécialité)
Devoir à la maison n° 5
À rendre lundi 19 mai 2014

Sujet C page 92

Au 1er janvier 2012, la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour raisons familiales ou professionnelles, 10 % des propriétaires deviennent locataires tandis que 20 % des locataires deviennent propriétaires.

1. On désigne par p_n la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard, soit propriétaire au 1er janvier de l'année $2000 + n$ avec n entier supérieur ou égal à 0, et par l_n , la probabilité qu'il soit locataire.
   La matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = \begin{pmatrix} p_n & l_n \end{pmatrix}$ (avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n + l_n = 1$) l'état probabiliste après n années.

   a. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste et en déduire que ce graphe a pour matrice de transition :
   $$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

   b. Calculer l'état probabiliste P_1.

   c. Déterminer l'état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?

2. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$p_{n+1} = 0{,}7p_n + 0{,}2.$$

3. On considère maintenant la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.

   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7.

   b. Exprimer u_n en fonction de n et démontrer que :
   $$p_n = -\frac{1}{6} \times 0{,}7^n + \frac{2}{3}.$$

   c. Calculer la limite de la suite (p_n) et retrouver le résultat de la question 1. c.