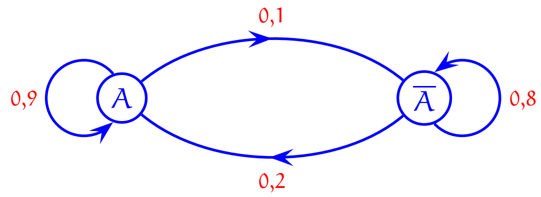
Terminale ES_1 (enseignement de spécialité)
Corrigé du devoir à la maison n° 5

Sujet C page 92

1. a. *Graphe probabiliste représentant la situation*

On note A l'état : « être propriétaire » et $B = \overline{A}$ l'état : « être locataire ».
En utilisant les données de l'énoncé, on obtient :



La matrice de transition, M, a pour première ligne, la probabilité qu'une personne reste propriétaire, puis la probabilité de devenir locataire, c'est-à-dire 0,9 et 0,1 et pour deuxième ligne, la probabilité de devenir propriétaire, puis la probabilité de rester locataire, c'est-à-dire 0,2 et 0,8. On a donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

b. *État probabiliste* P_1

$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \end{pmatrix}.$

c. *État stable*

Comme aucun coefficient de M n'est nul, l'état probabiliste P_n tend vers un état stable unique P, indépendant de l'état initial P_0.

L'état stable $P = \begin{pmatrix} p & l \end{pmatrix}$ est défini par $P = P \times M$ et $p + l = 1$.

$P = P \times M$ s'écrit $\begin{pmatrix} p & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & l \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9p + 0{,}2l & 0{,}1p + 0{,}8l \end{pmatrix}.$

On obtient le système $\begin{cases} p = 0{,}9p + 0{,}2l \\ l = 0{,}1p + 0{,}8l \\ p + l = 1 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} 0{,}1p = 0{,}2l \\ 0{,}2l = 0{,}1p \\ p + l = 1 \end{cases}.$

Ce système est donc équivalent à $\begin{cases} p = 2l \\ p + l = 1 \end{cases}$ ainsi on obtient $p = \dfrac{2}{3}$ et $l = \dfrac{1}{3}$.

L'état stable est $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Cela signifie que la population de la ville tend vers une proportion de $\dfrac{2}{3}$ de propriétaires pour $\dfrac{1}{3}$ de locataires.

2. *Calcul de* p_{n+1} *en fonction de* p_n

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P_{n+1} = P_n \times M = \begin{pmatrix} p_{n+1} & l_{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9p_n + 0{,}2l_n & 0{,}1p_n + 0{,}8l_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}2l_n$.

Or, $p_n + l_n = 1$ donc $l_n = 1 - p_n$, ainsi, $p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}2(1 - p_n) = 0{,}7p_n + 0{,}2$.

3. a. *Nature de la suite* (u_n) *définie par* $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = 0{,}7p_n + 0{,}2 - \frac{2}{3} = \frac{7}{10}p_n - \frac{7}{15} = \frac{7}{10}\left(p_n - \frac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{10}}\right) = \frac{7}{10}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = 0{,}7u_n.$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$.

Son premier terme est $u_0 = p_0 - \dfrac{2}{3} = 0{,}5 - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6}$.

b. *Calculs de* u_n *et de* p_n *en fonction de* n

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = -\dfrac{1}{6} \times 0{,}7^n$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p_n = u_n + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6} \times 0{,}7^n + \dfrac{2}{3}$.

c. *Limite de* (p_n)

Comme $0 < 0{,}7 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n + \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $l_n = 1 - p_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi, l'état probabiliste P_n tend vers l'état stable $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ quand n tend vers $+\infty$.