Terminale ES$_1$ (enseignement de spécialité)
Devoir en classe n^o 4
Lundi 26 mai 2014

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au centième près.

Cet exercice consiste à étudier la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.

Dans cet exercice, on considère l'information suivante, notée E : « Paul a réussi son examen ».

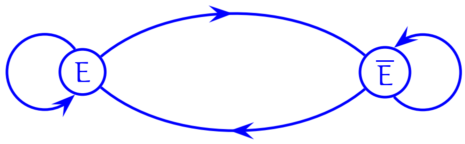
Partie A : propagation symétrique (de type « neutre »)

Dans cette partie, on suppose que, pour une information reçue : E ou $\overline{E}$, la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut $0{,}9$ et la probabilité de relayer l'information contraire est égale à $0{,}1$.

On note p_n la probabilité de recevoir l'information E au bout de n étapes (n étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note q_n la probabilité de recevoir l'information $\overline{E}$ au bout de n étapes.

On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :



2. Préciser la matrice de transition M telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times M$.
3. Déterminer par le calcul, l'état stable. Interpréter le résultat.

Partie B : propagation asymétrique (de type « rumeur »)

Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à $0{,}9$. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{E}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{E}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{E}$ est égale à 1.

On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Préciser la matrice de transition N telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times N$.
3. Montrer que $p_{n+1} = 0,9p_n$. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
4. Exprimer p_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.