Terminales S (enseignement de spécialité)
Devoir à la maison n° 1
À rendre mardi 1er octobre 2013

Exercice n° 62 page 98

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Vérifier que $A^3 = 2A + A^2$.
3. En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de nombres réels telles que, pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
$$A^n = a_n A + b_n A^2 \text{ avec } \begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n. \end{cases}$$
4. a. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.
   b. Déterminer b_3 et b_4.
   c. Écrire un algorithme dont l'entrée est un entier naturel n supérieur ou égal à 5 qui calcule la valeur de b_n.
   d. On admet qu'il existe deux réels u et v tels que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
   $$b_n = u \times (-1)^n + v \times 2^n.$$
   Déterminer les valeurs de u et v.
5. Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 3$, a_n en fonction de n.