Terminales S (enseignement de spécialité)
Corrigé de l'exercice 2 du devoir en classe n° 5

$\boxed{(E) : 23x - 60y = 1 \text{ avec } (x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2}$

1. *Existence de solutions pour l'équation* $92x - 60y = 1$ *dans* $\mathbb{Z}^2$
   On peut remarquer que $92x - 60y = 4(23x - 15y)$.
   On raisonne par l'absurde : si $(x\,;\,y)$ est une solution de l'équation $92x - 60y = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$ alors 4 divise 1, ce qui est absurde.
   Ainsi, l'équation $92x - 60y = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
2. *Existence de solutions pour l'équation* (E) *dans* $\mathbb{Z}^2$
   On vérifie (avec l'algorithme d'EUCLIDE par exemple) que 23 et 60 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de BÉZOUT, il existe $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $23x - 60y = 1$.
   Ainsi, l'équation (E) a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
3. a. *Solution particulière de* (E)
   En utilisant l'algorithme d'EUCLIDE on obtient $23 \times (-13) - 60 \times (-5) = 1$.
   Une solution de l'équation (E) est $(-13\,;\,-5)$.

   b. *Résolution de l'équation* (E) *dans* $\mathbb{Z}^2$
   En utilisant la méthode classique avec la solution particulière trouvée à la question précédente, l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$ est :
   $$S = \{(60k - 13\,;\,23k - 5)/k \in \mathbb{Z}\}.$$

   c. *Existence d'un unique entier naturel* x_0 *inférieur à* 60 *tel que* $23x_0 \equiv 1 \pmod{60}$
   $23x_0 \equiv 1 \pmod{60}$ signifie que $23x_0 = 1 + 60y_0$ avec $y_0 \in \mathbb{Z}$.
   On a donc $23x_0 - 60y_0 = 1$, ainsi $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution de l'équation (E) donc $x_0 = 60k - 13$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Or $0 \leqslant x_0 \leqslant 60$ donc $0 \leqslant 60k - 13 \leqslant 60$, soit $13 \leqslant 60k \leqslant 73$ donc $\dfrac{13}{60} \leqslant k \leqslant \dfrac{73}{60}$ et comme k est un nombre entier, on a $k = 1$.
   Pour $k = 1$, $x_0 = 60 \times 1 - 13 = 47$.
   Il existe donc un seul entier naturel x_0 inférieur à 60 tel que $23x_0 \equiv 1 \pmod{60}$, ce nombre entier est $x_0 = 47$.
   (On peut vérifier : $23 \times 47 = 1\,081 = 1 + 60 \times 18$.)
4. *Démonstration de la propriété : pour tous entiers naturels* a *et* b, *si* $a^{23} \equiv b \pmod{44}$ *et si* $a^{60} \equiv 1 \pmod{44}$, *alors* $b^{47} \equiv a \pmod{44}$
   Si $a^{23} \equiv b \pmod{44}$ alors $b^{47} \equiv \left(a^{23}\right)^{47} \pmod{44}$ donc $b^{47} \equiv a^{1\,081} \pmod{44}$.
   Or $1\,081 = 1 + 60 \times 18$ donc $b^{47} \equiv a^{1+60\times 18} \pmod{44}$, ainsi, $b^{47} \equiv a \times \left(a^{60}\right)^{18} \pmod{44}$.
   Comme $a^{60} \equiv 1 \pmod{44}$ alors $\left(a^{60}\right)^{18} \equiv 1 \pmod{44}$ donc $b^{47} \equiv a \pmod{44}$.
   On a démontré que, pour tous entiers naturels a et b :
   $$\boxed{\text{si } a^{23} \equiv b \pmod{44} \text{ et si } a^{60} \equiv 1 \pmod{44} \text{ alors } b^{47} \equiv a \pmod{44}.}$$