Calcul intégral

Deuxième partie

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Février 2014

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

Dans tout le chapitre les intervalles sont non vides.

1 Intégrale et primitives

1.1 Introduction

On considère une fonction f continue, positive et croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (avec $a < b$).
Soit F la fonction définie sur $[a\ ;\ b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Il s'agit de démontrer que F est dérivable pour tout $x_0 \in [a\ ;\ b]$ et de calculer $F'(x_0)$.
On pose $T(x) = \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ avec $x \in [a\ ;\ b]$ et $x \neq x_0$.

a. Vérifier graphiquement que $F(x) - F(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ si $x > x_0$ et $F(x_0) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x_0} f(t)\,dt$ si $x < x_0$.

b. En utilisant la croissance de la fonction f, montrer que, pour tout $x > x_0$,

$$0 \leqslant T(x) - f(x_0) \leqslant f(x) - f(x_0). \tag{1}$$

On montre de même, montrer que, pour tout $x < x_0$,

$$f(x) - f(x_0) \leqslant T(x) - f(x_0) \leqslant 0. \tag{2}$$

Les encadrements (1) et (2) permettent d'écrire, pour tout $x \in [a\ ;\ b]$ et $x \neq x_0$:

$$0 \leqslant |T(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)|. \tag{3}$$

Or f est continue sur $[a\ ;\ b]$, donc en x_0, d'où $\displaystyle\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ et d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} |T(x) - f(x_0)| = 0$ soit $\displaystyle\lim_{x \to x_0} T(x) = f(x_0)$. La fonction F est donc dérivable pour tout $x_0 \in [a\ ;\ b]$ et $F'(x_0) = f(x_0)$.
De plus $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$ (le domaine associé à f entre a et a se réduit à un segment).

1.2 Théorème fondamental

On admet que la propriété démontrée dans l'introduction se généralise à toute fonction continue positive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (avec $a < b$) et de sens de variation quelconque sur $[a\ ;\ b]$.

Théorème 1.2.1
Si f est une fonction continue positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ (avec $a < b$) alors la fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ qui s'annule en a (F est donc dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et $F' = f$).

Théorème 1.2.2
Toute fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ (avec $a < b$) possède des primitives définies sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

✏ Démontrer le théorème 1.2.2. Pour cela on supposera que $[m\,;\,M]$ est l'image de $[a\,;\,b]$ par la fonction continue f et on introduira la fonction $x \longmapsto g(x) = f(x) - m$.

☛ On admet que le résultat du théorème 1.2.2 se généralise pour un intervalle quelconque.

On admet également la généralisation du théorème 1.2.1 à un intervalle quelconque et à une fonction continue de signe quelconque :

Théorème 1.2.3
Soit f *une fonction continue sur un intervalle* I *et soit* $a \in I$*.*
La fonction F *définie sur* I *par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f *sur* I *qui s'annule en* a *(*F *est donc dérivable sur* I *et* $F' = f$*).*

1.3 Exercice d'application

On considère la fonction G définie pour tout nombre réel x par :

$$G(x) = \int_2^x \frac{t+2}{t^2+4}\,dt.$$

a. Justifier l'existence de G.

b. Déterminer la dérivée G' de G.
Étudier les variations de G et construire le tableau de variation (*on ne cherchera pas les limites de la fonction* G *en* $+\infty$ *ou en* $-\infty$).

c. En déduire que G possède un minimum et que ce minimum est strictement négatif.

2 Calcul de l'intégrale d'une fonction continue

2.1 Calcul de l'intégrale d'une fonction continue positive

Propriété 2.1.1
Soit f *une fonction continue sur un intervalle* I*.*
Si F_1 *et* F_2 *sont deux primitives de* f *sur* I *et si* a *et* b *sont deux nombres de* I *alors :*

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a).$$

✏ Démontrer la propriété 2.1.1.

Théorème 2.1.2
Soit f *une fonction continue positive sur un intervalle* I*.*
Si F *est une primitive quelconque de* f *sur* I *et si* a *et* b *sont deux nombres de* I *tels que* $a < b$ *alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

✏ Démontrer le théorème 2.1.2 en utilisant la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

✏ Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$.

2.2 Calcul de l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

La formule du théorème 2.1.2 se généralise dans le cas d'une fonction continue de signe quelconque.

Théorème 2.2.1
Soit f *une fonction continue sur un intervalle* I.
Si F *est une primitive quelconque de* f *sur* I *et si* a *et* b *sont deux nombres de* I *alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

✏ Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx$.

Peut-on calculer $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$?

2.3 Démonstrations ou vérifications de certaines propriétés de l'intégration

2.3.1 Propriétés concernant l'intervalle d'intégration

Théorème 2.3.1
Soit f *une fonction continue sur un intervalle* I.

a. *Quel que soit* $a \in I$, $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

b. *Quels que soient* $a \in I$, $b \in I$ *et* $c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ *(relation de* CHASLES*).*

c. *Quels que soient* $a \in I$ *et* $b \in I$, $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

✏ Démontrer le théorème 2.3.1 en utilisant le théorème 2.2.1.

2.3.2 Linéarité de l'intégrale

Théorème 2.3.2
Si f *et* g *sont deux fonctions continues sur un intervalle* I, *si* $a \in I$ *et* $b \in I$ *alors :*

$$\int_a^b \big[f(x) + g(x)\big]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Théorème 2.3.3
Si f *est une fonction continue sur un intervalle* I, *si* $k \in \mathbb{R}$ *(*k *est une constante réelle ne dépendant pas de la variable d'intégration), si* $a \in I$ *et* $b \in I$, *alors :*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Corollaire 2.3.4
Si f *et* g *sont deux fonctions continues sur un intervalle* I, *si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *(*α *et* β *sont deux constantes réelles ne dépendant pas de la variable d'intégration), si* $a \in I$ *et* $b \in I$ *alors :*

$$\int_a^b \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

✏ Démontrer les théorèmes 2.3.2 et 2.3.3.