Terminales S – devoir en classe n° 6
Jeudi 27 mars 2014

EXERCICE 1

Une étude statistique a montré que la durée de vie en années X d'un disque dur était une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle et que la durée de vie moyenne d'un disque dur était de 5 ans.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par X.
2. Le disque dur est garanti 2 ans. Quelle est la proportion, à 10^{-2} près, de disques durs qui seront retournés au fournisseur pour cause de panne ?
3. Calculer $P(X \geqslant 3)$ et interpréter ce résultat.
4. Sachant qu'un disque dur n'est plus sous garantie, quelle est la probabilité, à 10^{-2} près, que sa durée de vie totale dépasse 5 ans ?

EXERCICE 2

Pour chaque question, trouver la ou les bonnes réponses. Vous recopierez sur votre copie la phrase avec la ou les bonnes réponses.
Chaque question est notée sur 1 point. Pour obtenir le point, il faut trouver toutes les bonnes réponses.

1. la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ vérifie pour tout nombre x et y l'équation fonctionnelle suivante :
   - $f(x) + f(y) = f(xy)$;
   - $f(x)f(y) = f(x+y)$;
   - $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x-y)$;
   - $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$.
2. Le nombre $A = e^3 \times \left(e^{-2}\right)^5 \times e$ peut également s'écrire :
   - e^{13} ;
   - e^7 ;
   - e^{-6} ;
   - e^{-30}.
3. f est une fonction continue décroissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. Alors :
   - Si $u_n = f\left(e^{-n}\right)$ alors (u_n) est croissante.
   - Si $u_n = f\left(e^{n}\right)$ alors (u_n) est croissante.
   - Si $u_n = e^{f(-n)}$ alors (u_n) est décroissante.
   - Si $u_n = e^{f(n)}$ alors (u_n) est décroissante.
4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(e^x + 3)(e^x - 1) \geqslant 0$ est :
   - $]-\infty\,;\,-3] \cup [1\,;\,+\infty[$;
   - $[0\,;\,+\infty[$;
   - $]-\infty\,;\,0]$;
   - $\mathbb{R}$.
5. Soit $I = \displaystyle\int_0^a \left(e^{2x} - x\right) dx$, avec $a \in \mathbb{R}$. Alors :

   $I = e^{2a} - a$;

   $I = e^{2a} - \dfrac{1}{2}a^2$;

   $I = \dfrac{1}{2}\left(e^{2a} - a^2 - 1\right)$;

   $I = \dfrac{1}{2}\left(e^{2a} - a^2\right) - 1$.

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$g(x) = -(x+1)e^{-x}$$

   est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
5. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près).

Partie B

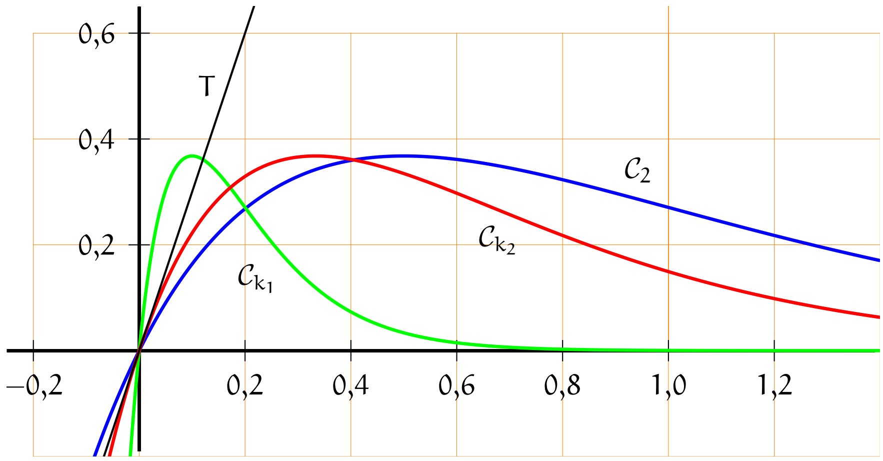
Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kxe^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On remarque que la fonction f_1 est la fonction f de la partie A, et que la courbe $\mathcal{C}_1$ est donc la courbe $\mathcal{C}$.

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_{k_1}$ et $\mathcal{C}_{k_2}$ où k_1 et k_2 sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_{k_2}$ au point O, origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.
2. a. Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a :

$$f_k'(x) = k(1 - kx)e^{-kx}.$$

   b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

   c. En observant le graphique ci-dessus, comparer k_1 et 2. Expliquer la démarche.

   d. Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O, origine du repère.

   e. En déduire à l'aide du graphique la valeur de k_2.