Algorithmes de résolutions de systèmes

Illustrations avec XCAS et CAML

Guillaume CONNAN

IREM de Nantes

11 janvier 2010

Sommaire

Sommaire

Soit un système $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$.

Soit D le déterminant du sytème : $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
S'il est non nul, il est assez aisé de montrer en Seconde que les solutions sont :

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{D} \qquad y = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{D}$$

Cela peut mettre en évidence les rôles des inconnues (qui n'apparaissent pas en entrée dans l'algorithme) et des coefficients.

Soit un système $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$.

Soit D le déterminant du sytème : $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

S'il est non nul, il est assez aisé de montrer en Seconde que les solutions sont :

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{D} \qquad y = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{D}$$

Cela peut mettre en évidence les rôles des inconnues (qui n'apparaissent pas en entrée dans l'algorithme) et des coefficients.

Soit un système $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$.

Soit D le déterminant du sytème : $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

S'il est non nul, il est assez aisé de montrer en Seconde que les solutions sont :

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{D} \qquad y = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{D}$$

Cela peut mettre en évidence les rôles des inconnues (qui n'apparaissent pas en entrée dans l'algorithme) et des coefficients.

Soit un système $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$.

Soit D le déterminant du sytème : $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

S'il est non nul, il est assez aisé de montrer en Seconde que les solutions sont :

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{D} \qquad y = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{D}$$

Cela peut mettre en évidence les rôles des inconnues (qui n'apparaissent pas en entrée dans l'algorithme) et des coefficients.

Entrées : Les coefficients

début

  si $D=0$ **alors**

    pas de solution unique

  sinon

    $x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{D} \qquad y = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{D}$

fin

```
cramer(a11,a12,b1,a21,a22,b2):={
 si a11*a22-a21*a12==0
   alors return("Pas de solution unique")
   sinon return((b1*a22-b2*a12)/(a11*a22-a21*a12), (a11*b2-
       a21*b1)/(a11*a22-a21*a12))
 fsi
}:;
```

Sommaire

Nous traiterons le cas d'un système 3×3 mais rien n'empèche de généraliser.

Comme nous sommes entre nous, nous « parlerons matrice ».

Nous traiterons le cas d'un système 3×3 mais rien n'empèche de généraliser.
Comme nous sommes entre nous, nous « parlerons matrice ».

Nous disposons donc d'une matrice carrée A de dimension 3 et d'une matrice colonne B de longueur 3. Nous voulons résoudre dans $\mathrm{M}_{13}(\mathbb{R})$ le système $A \cdot X = B$.
Nous noterons T le tableau :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

Si la matrice est inversible, alors, en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, on peut se ramener à la matrice identité dans la partie gauche du tableau et on obtient X dans la partie droite.

Pour y arriver, l'idée est de balayer le tableau par colonne.
Étant donné une colonne, on cherche un élément non nul. S'il n'y en a pas, la matrice n'est pas inversible et le système n'admet pas une unique solution (on ne s'occupe pas trop du rang au lycée...) ; sinon, on permute éventuellement deux lignes pour placer l'élément non nul de la colonne k sur la ligne k et on divise tous les éléments de la ligne par le nouveau a_{kk} pour obtenir 1.
Il reste ensuite à remplacer chaque ligne (autre que L_k) dont l'élément de la colonne k est non nul par $L_i - a_{ik} \times L_k$.

```
Gauss(T):={
local S,NoColonne,NoLigne,temp,E,k,j;
S:=T;
pour NoColonne de 0  jusque 2  faire
  NoLigne:=NoColonne;
  tantque S[NoLigne][NoColonne]==0 faire
    NoLigne:=NoLigne+1;
    si NoLigne==3 alors return("pas de solution unique");
    fsi;
  ftantque;

 temp:=S[NoLigne];
 S[NoLigne]:=S[NoColonne];
 S[NoColonne]:=1/temp[NoColonne]*temp;

 E:=%{0,1,2%} minus %{NoColonne%};

 pour k in E faire
   S[k]:=S[k]-S[k][NoColonne]*S[NoColonne];
 fpour;
fpour;
return([seq(S[j][3],j=0..2)])
}:;
```