

Affecter ou ne pas affecter ?

Guillaume Connan - IREM de Nantes

22 octobre 2009

Résumé L'algorithmique fait une entrée remarquée dans le nouveau programme de Seconde. Il y est fait clairement mention de l'apprentissage de l'affectation, des entrées-sorties et des boucles comme allant de soi, ce qui sous-entend que seule existe la programmation impérative. Cependant la programmation fonctionnelle est une alternative très proche des mathématiques et de leur enseignement dans le secondaire. Nous verrons dans quelle mesure l'enseignement de l'algorithmique via les langages fonctionnels peut être enrichissant et complémentaire d'une approche purement impérative.

1 Conventions

L'objet de cet article n'est pas d'envisager ces deux modes de programmation avec le point de vue de l'informaticien cherchant la méthode la plus rapide mais avec celui d'un professeur *de mathématiques* s'adressant à des élèves *débutants* dans ce domaine¹.

Ce court article ne fournit pas d'activités clé-en-main mais donne des éléments pour alimenter la réflexion du professeur, en particulier en montrant que la programmation fonctionnelle, souvent méconnue (même si elle est implicite dans un tableur ou peut être utilisée en primaire avec la tortue Logo), est très proche des mathématiques.

Nous ne parlerons pas d'un logiciel en particulier. Cependant, afin d'illustrer de manière pratique notre propos, nous utiliserons XCAS, logiciel multifonctions spécialement conçu pour être utilisé en classe de mathématiques dont l'usage aujourd'hui est assez largement répandu et OCAML, logiciel utilisant la programmation fonctionnelle (même s'il permet aussi d'avoir recours à un style impératif).

2 Programmation impérative et affectations

2.1 Aspect technique

La programmation impérative est la plus répandue (Fortran, Pascal, C,...) et la plus proche de la machine réelle. Son principe est de modifier à chaque instant l'état de la mémoire via les affectations. Historiquement, son principe a été initié par John VON NEUMANN et Alan TURING.

Par exemple, lorsqu'on entre avec XCAS :

```
a:=2
```

cela signifie que la case mémoire portant le petit « fanion » a contient à cet instant la valeur 2.

On peut changer le contenu de cette case mémoire un peu plus tard :

```
a:=4
```

et cette fois la case a contient la valeur 4.

Le caractère chronologique de ce type de programmation est donc primordial. Regardons la suite d'instructions suivante :

```
a:=1;
b:=2;
a:=a+b; // maintenant a contient 3
b:=a-b; // maintenant b contient 3-2=1
a:=a-b; // maintenant a contient 3-1=2
```

1. lui-même pouvant d'ailleurs appartenir à cette catégorie!...

Cela permet d'échanger les contenus des cases mémoire a et b.

Si l'on change l'ordre d'une quelconque des trois dernières lignes, les valeurs présentes dans les cases mémoires nommées a et b vont être différentes.

Si l'on regarde les deux dernières lignes, elles affectent apparemment la même valeur (a-b) à a et à b et pourtant c'est faux car les variables a et b ne contiennent pas les mêmes valeurs selon le moment où elles sont appelées.

Il faut donc être extrêmement attentif à la chronologie des instructions données. C'est un exercice intéressant en soi mais pas sans danger (c'est d'ailleurs la source de la plupart des « bugs » en informatique).

La motivation première de ce type de fonctionnement a été pratique : les ordinateurs étant peu puissants, le souci principal du concepteur de programme a longtemps été d'économiser au maximum la mémoire. Au lieu d'accumuler des valeurs dans différents endroits de la mémoire (répartition spatiale), on les stocke au même endroit mais à différents moments (répartition temporelle). C'est le modèle des machines à états (machine de TURING et architecture de VON NEUMANN) qui impose au programmeur de connaître à tout instant l'état de la mémoire centrale.

2.2 Exploitation mathématique possible

En classe de mathématique, cet aspect technique nous importe peu. Il nous permet cependant d'illustrer dynamiquement la notion de fonction :

```
y:=x^2+1;

x:=1;  y;  // ici y=2
x:=-5; y;  // ici y=26
x:=1/2; y; // ici y=5/4
```

La fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ dépend de la variable x . On affecte une certaine valeur à la variable ce qui détermine la valeur de son image. Il est toutefois à noter qu'en fait on a travaillé ici sur des expressions numériques et non pas des fonctions.

On peut enchaîner des affectations :

```
y:=x^2+1;
z:=y+3;

x:=1;  y; z; /* ici y=2 et z=5 */
x:=-5  y; z; // ici y=26 et z=29;
x:=1/2; y; z; // ici y=5/4 et z=17/4;
```

et illustrer ainsi la composition de fonctions.

Avec un peu de mauvaise foi (car le cas est simple et artificiel) mais pas tant que ça puisque de tels problèmes sont source de milliers de bugs sur des milliers de programmes plus compliqués, nous allons mettre en évidence un problème majeur de ce genre de programmation quand on n'est pas assez attentif.

On crée à un certain moment une variable a à laquelle on affecte une valeur :

```
a:=2;
```

On introduit plus tard une procédure (une sorte de fonction informatique des langages impératifs) qu'on nomme f et qui effectue certains calculs en utilisant a :

```
f(x):={
  a:=a+1;
  return(x+a)
}
```

Alors $f(5)$ renvoie 8 mais si on redemande $f(5)$ on obtient à présent 9 et si on recommence on obtient 10, etc. car à chaque appel de la procédure f , la variable a est modifiée : ici $2 \times f(5) \neq f(5) + f(5)$!

On peut donc construire un objet qui **ressemble** à une fonction d'une variable (mais qui n'en est évidemment pas) et qui à une même variable renvoie plusieurs valeurs. En effet, une procédure² ne dépend pas uniquement des arguments entrés et donc peut changer de comportement au cours du programme : c'est ce qu'on appelle en informatique des *effets de bord*.

On a en fait plutôt construit ici une fonction de deux variables :

$$g : (a, x) \rightarrow x + a$$

2. Certains langages utilisent le terme fonction mais nous préférons « procédure » pour ne pas confondre avec les fonctions mathématiques.

Le premier appel de $f(5)$ est en fait $g(3,5)$ et le deuxième $g(4,5)$, etc. mais on a pu le faire en utilisant une forme qui **laisse à penser** que f est une fonction qui renvoie une infinité d'images différentes d'un même nombre.

Informatiquement, a et x jouent des rôles différents puisque x est un argument de la procédure f et a est une variable globale donc « extérieure » à f (on dirait un *paramètre*). D'ailleurs, XCAS envoie un avertissement pour nous le rappeler :

```
// Warning: a, declared as global variable(s)compiling f
```

2.3 Programmation fonctionnelle

Les langages fonctionnels bannissent totalement les affectations. Ils utilisent des fonctions *au sens mathématique du terme*, c'est-à-dire qu'une fonction associe une unique valeur de sortie à une valeur donnée en entrée. Les fonctions peuvent être testées une par une car *elles ne changent pas selon le moment où elles sont appelées dans le programme*. On parle de *transparence référentielle*. Le programmeur n'a donc pas besoin de savoir dans quel état se trouve la mémoire. C'est le logiciel qui s'occupe de la gestion de la mémoire.

Historiquement, ce style de programmation est né du λ -calcul développé par Alonzo CHURCH juste avant la publication des travaux d'Alan TURING³.

Ce principe d'utilisation de fonctions au sens mathématique est perturbant pour des programmeurs formés aux langages impératifs mais ne devraient pas troubler des mathématiciens...

La **récurtivité** est le mode habituel de programmation avec de tels langages : il s'agit de fonctions qui s'appellent elles-mêmes. Pendant longtemps, la qualité des ordinateurs et des langages fonctionnels n'était pas suffisante et limitaient les domaines d'application de ces langages.

On utilise également en programmation fonctionnelle des *fonctions d'ordre supérieur*, c'est-à-dire des fonctions ayant comme arguments d'autres fonctions : cela permet par exemple de créer des fonctions qui à une fonction dérivable associe sa fonction dérivée.

2.3.1 Un premier exemple d'algorithme récursif

Si nous reprenons notre exemple précédent, nous pouvons faire exprimer aux élèves que l'entier suivant n est égal à $1 +$ l'entier suivant $n - 1$: on ne sort pas des limites du cours de mathématiques et on n'a pas besoin d'introduire des notions d'informatique en travaillant sur cette notion.

On peut écrire un algorithme ainsi :

```
si n = 0 alors
  | 1
sinon
  L 1+ successeur de n-1
```

La récursivité n'est pas l'apanage des langages fonctionnels. Par exemple XCAS permet d'écrire des programmes récursifs.

En français :

```
successeur(k) := {
  si k==0 alors 1
  sinon 1+successeur(k-1)
  fsi
};;
```

En anglais :

```
successeur(k) := {
  if (k==0) then {1}
  else {1+successeur(k-1)}
};;
```

Que se passe-t-il dans le cœur de l'ordinateur lorsqu'on entre `successeur(3)` ?

- On entre comme argument 3 ;
- Comme 3 n'est pas égal à 0, alors `successeur(3)` est stocké en mémoire et vaut `1+successeur(2)` ;
- Comme 2 n'est pas égal à 0, alors `successeur(2)` est stocké en mémoire et vaut `1+successeur(1)` ;
- Comme 1 n'est pas égal à 0, alors `successeur(1)` est stocké en mémoire et vaut `1+successeur(0)` ;
- Cette fois, `successeur(0)` est connu et vaut 1 ;
- `successeur(1)` est maintenant connu et vaut `1+successeur(0)` c'est-à-dire 2 ;
- `successeur(2)` est maintenant connu et vaut `1+successeur(1)` c'est-à-dire 3 ;
- `successeur(3)` est maintenant connu et vaut `1+successeur(2)` c'est-à-dire 4 : c'est fini !

3. qui a d'ailleurs été un étudiant de Church à Princeton...

C'est assez long comme cheminement mais ce n'est pas grave car *c'est l'ordinateur qui effectue le « sale boulot »!* Il stocke les résultats intermédiaires dans une *pile* et n'affiche finalement que le résultat.

Comme il calcule vite, ce n'est pas grave. L'élève ou le professeur ne s'est occupé que de la définition récursive (mathématique!) du problème.

XCAS calcule facilement **successeur(700)** mais **successeur(7000)** dépasse les possibilités de calcul du logiciel.

Et oui, un langage impératif ne traite pas efficacement le problème de pile, c'est pourquoi pendant longtemps seuls les algorithmes impératifs ont prévalu.

Remarque : par défaut, XCAS s'arrête au bout de 50 niveaux de récursion. Pour aller plus loin, il faut cliquer sur *config* à côté de *save*. Régler alors la fenêtre *recurs* à 1000 par exemple

Utilisons à présent le langage fonctionnel OCAML, développé par l'INRIA⁴. Même s'il intègre des aspects impératifs pour faciliter l'écriture de certains algorithmes, il est en premier lieu un langage fonctionnel qui en particulier gère très efficacement la mémoire de l'ordinateur pour éviter sa saturation lors d'appels récursifs.

Le programme s'écrit comme en mathématique (mais en anglais...) :

```
# let rec successeur(k)=
  if k=0 then 1
  else 1+successeur(k-1);;
```

Alors par exemple :

```
# successeur(36000);;
- : int = 36001
```

Mais

```
# successeur(3600000);;
Stack overflow during evaluation (looping recursion?).
```

La *pile* où sont stockés les résultats intermédiaires créés par la récursion est en effet saturée.

Aujourd'hui, les langages fonctionnels sont très efficaces et gèrent de manière intelligente la *pile*. Ils le font soit automatiquement, soit si la fonction utilise une *récursion terminale*, c'est-à-dire si l'appel récursif à la fonction n'est pas *enrobé* dans une autre fonction.

Ici, ce n'est pas le cas car l'appel récursif **successeur(k-1)** est enrobé dans la fonction $x \mapsto 1 + x$.

On peut y remédier en introduisant une fonction intermédiaire qui sera récursive terminale :

```
# let rec successeur_temp(k,resultat)=
  if k=0 then resultat
  else successeur_temp(k-1,resultat+1);;
```

puis on appelle cette fonction en prenant comme résultat de départ 1 :

```
# let successeur_bis(k)=
  successeur_temp(k,1);;
```

Alors :

```
# successeur_bis(360000000);;
- : int = 360000001
```

Il n'y a donc aucun problème pour traiter 360 millions d'appels récursifs!

Dans un premier temps, on peut laisser de côté ce problème de récursion terminale au lycée et se contenter de travailler sur de petits entiers. Ainsi, on peut choisir de travailler avec OCAML ou XCAS par exemple, même si ce dernier n'est pas un langage fonctionnel.

2.4 Un premier exemple de fonction d'ordre supérieur

Définissons une fonction qui à deux fonctions f et g associe sa composée $f \circ g$:

```
# let compose=function
  (f,g) -> function x->f(g(x));;
```

OCAML devine le type des objets introduits en répondant :

4. Institut National de Recherche en Informatique et Automatique

```
val compose : ('a -> 'b) * ('c -> 'a) -> 'c -> 'b = <fun>
```

Ceci signifie que `compose` est une fonction (le `<fun>` final) qui prend comme arguments deux fonctions (la première qui transforme une variable de type `a` en une variable de type `b` et la deuxième qui transforme une variable de type `c` en une variable de type `a`) et qui renvoie une fonction qui transforme une variable de type `c` en une variable de type `b`. En résumé, on peut schématiser ce qu'a compris OCAML :

$$f : 'a \rightarrow 'b \quad g : 'c \rightarrow 'a \quad f \circ g : 'c \rightarrow 'b$$

Créons deux fonctions numériques :

```
# let carre = function
  x -> x*x;;

# let double = function
  x -> 2*x;;
```

Composons-les :

```
# compose(double, carre)(2);;
- : int = 8
# compose(carre, double)(2);;
- : int = 16
```

En effet, le double du carré de 2 est 8 alors que le carré du double de 2 vaut 16...

On peut cependant composer des fonctions non numériques.

Soit `longueur` la fonction qui renvoie le nombre d'éléments d'une liste (cf section [4 page 15](#)) :

```
# let rec longueur = function
  | [] -> 0
  | tete::corps -> 1 + longueur(corps);;
```

Soit `rebours` la fonction qui crée la liste décroissante des entiers de n à 1 :

```
# let rec rebours(n) =
  if n=0 then []
  else n::rebours(n-1);;
```

Il s'agit de fonctions qui à une liste associe un entier ou l'inverse.

On peut malgré tout les composer avec la même fonction `compose`. On entre une liste de chaînes de caractères :

```
# compose(rebours, longueur)(["a";"b";"c";"d";"e";"f";"g";"h"]);;
```

et on obtient une liste d'entiers :

```
- : int list = [8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1]
```

On peut faire la même chose avec XCAS :

```
compose(f,g):={
  x->f(g(x))
}
```

Puis par exemple :

```
compose(x->x^2, x->2*x)(2)
```

Un exemple encore plus puissant sera vu à la section [4.1 page 15](#).

3 Deux manières d'aborder un même problème

3.1 Les tours de Hanoï

3.1.1 Le principe

Ce casse-tête a été posé par le mathématicien français Édouard LUCAS en 1883.

Le jeu consiste en une plaquette de bois où sont plantés trois piquets. Au début du jeu, n disques de diamètres croissant de bas en haut sont placés sur le piquet de gauche. Le but du jeu est de mettre ces disques dans le même ordre sur le piquet de droite en respectant les règles suivantes :

- on ne déplace qu'un disque à la fois ;
- on ne peut poser un disque que sur un disque de diamètre supérieur.

Essayez avec 2 puis 3 disques... Nous n'osons pas vous demander de résoudre le problème avec 4 disques !

3.1.2 Non pas comment mais pourquoi : version récursive

En réfléchissant récursivement, c'est enfantin !... Pour définir un algorithme récursif, il nous faut régler un cas simple et pouvoir simplifier un cas compliqué.

- *cas simple* : s'il y a zéro disque, il n'y a rien à faire !
- *simplification d'un cas compliqué* : nous avons n disques au départ sur le premier disque et nous savons résoudre le problème pour $n - 1$ disques. Appelons A, B et C les piquets de gauche à droite. Il suffit de déplacer les $n - 1$ disques supérieurs de A vers B (hypothèse de récurrence) puis on déplace le plus gros disque resté sur A en C. Il ne reste plus qu'à déplacer vers C les $n - 1$ disques qui étaient en B. (hypothèse de récurrence).

On voit bien la récursion : le problème à n disques est résolu si on sait résoudre le cas à $n - 1$ disques et on sait quoi faire quand il n'y a plus de disques.

On sait pourquoi cet algorithme va réussir mais on ne sait pas comment s'y prendre étape par étape.

On va donc appeler à l'aide l'ordinateur en lui demandant d'écrire les mouvements effectués à chaque étape.

On commence par créer une fonction qui affichera le mouvement effectué :

```
let mvt depart arrivee=  
print_string  
("Déplace un disque de la tige "^depart^" vers la tige "^arrivee");  
print_newline();;
```

Le programme proprement dit :

```
let rec hanoi a b c= function  
| 0 -> () (*0 disque : on ne fait rien*)  
| n -> hanoi a c b (n-1); (*n-1 disques sont placés dans l'ordre de a vers b*)  
      mvt a c; (*on déplace le disque restant en a vers c*)  
      hanoi b a c (n-1) (*n-1 disques sont placés dans l'ordre de b vers c*);;
```

Les phrases entre (* et *) sont des commentaires.

Par exemple, dans le cas de 3 disques :

```
# hanoi "A" "B" "C" 3;;  
Déplace un disque de la tige A vers la tige C  
Déplace un disque de la tige A vers la tige B  
Déplace un disque de la tige C vers la tige B  
Déplace un disque de la tige A vers la tige C  
Déplace un disque de la tige B vers la tige A  
Déplace un disque de la tige B vers la tige C  
Déplace un disque de la tige A vers la tige C  
- : unit = ()
```

3.1.3 Non pas pourquoi mais comment : version impérative

Prenez un papier et un crayon. Dessinez trois piquets A, C et B et les trois disques dans leur position initiale sur le plot A. Déplacez alors les disques selon la méthode suivante :

- déplacez le plus petit disque vers le plot suivant selon une permutation circulaire A-C-B-A ;
- un seul des deux autres disques est déplaçable vers un seul piquet possible.

Réitérez (en informatique à l'aide de boucles...) ce mécanisme jusqu'à ce que tous les disques soient sur C dans la bonne position.

On voit donc bien ici comment ça marche ; il est plus délicat de savoir pourquoi on arrivera au résultat.

Le programme est lui-même assez compliqué à écrire : vous trouverez une version en C (235 lignes...) à cette adresse :

<http://files.codes-sources.com/fichier.aspx?id=38936&f=HANOI%5cHANOI.C>

3.2 Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

3.2.1 Sans affectations

La relation $u_{n+1} = 3u_n + 2$ valable pour tout entier naturel n et la donnée de $u_0 = 5$ constituent un algorithme de calcul récursif de tout terme de la suite (u_n) .

```
si n=0 alors
  | u0
sinon
  | 3×u(n-1,u0)+2
```

Fonction $u(n, u_0)$

Sa traduction dans des langages sachant plus ou moins traiter de tels algorithmes est directe.

Par exemple, en XCAS, cela devient en français :

```
u(n, u0) := {
  si n=0 alors u0
  sinon 3*u(n-1, u0)+2
}
```

et en anglais :

```
u(n, u0) := {
  if (n==0) {return(u0)}
  else {3*u(n-1, u0)+2}
}
```

En OCAML :

```
# let rec u(n, u0) =
  if n=0 then u0
  else 3*u(n-1, u0)+2 ; ;
```

Ici encore, l'accent est mis sur le « pourquoi » et non pas le « comment » même s'il est beaucoup plus simple de le savoir que dans le cas des tours de Hanoï. On illustre le cours de 1ère sur les suites.

3.2.2 Avec affectations

Au lieu de stocker de nombreuses valeurs dans une pile, on affecte une seule case mémoire aux valeurs de la suite qui sera *ré-affectée*, au fur et à mesure du déroulement du programme.

```
Entrées : n,u0
Initialisation : temp ← u0
début
  | pour k de 1 jusque n faire
  |   | temp ← 3× temp+2
fin
```

Algorithme 2 : Suite récurrente : version impérative

Cela donne en français avec XCAS :

```

u_imp(n,u0):={
local k,temp;
temp:=u0;
pour k de 1 jusque n faire
  temp:=3*temp+2;
fpour
return(temp);
}

```

En anglais :

```

u_imp(n,u0):={
local k,temp;
temp:=u0;
for(k:=1;k<=n;k:=k+1){
temp:=3*temp+2;
}
return(temp);
}

```

Dans ce cas, on voit comment faire pour calculer u_n à partir de u_0 . La méthode peut paraître moins « élégante » mais elle est sûrement plus « concrètement » assimilable.

3.3 Calculs de sommes

On veut calculer la somme des entiers de 1 à n .

3.3.1 Sans affectation

Il suffit de remarquer que cela revient à ajouter n à la somme des entiers de 1 à $n-1$ sachant que la somme des entiers de 1 à 1 vaut... 1.

L'écriture est donc simple et mathématique :

```

si n=1 alors
  | 1
sinon
  | 1+som_ent(n-1)

```

En français avec XCAS :

```

som_ent(n):={
si n==1 alors 1
sinon n+som_ent(n-1)
fsi
};;

```

En anglais :

```

som_ent(n):={
if(n==1){1}
else{n+som_ent(n-1)}
};;

```

En OCAML :

```

# let rec som_ent(n)=
  if n=1 then 1
  else n+som_ent(n-1);;

```

Par exemple :

```

# som_ent(100000);;
- : int = 705082704

```

On peut même généraliser cette procédure à n'importe quelle somme du type $\sum_{k=k_0}^n f(k)$:

```
# let rec som_rec (f, ko, n)=  
  if n=ko then f(ko)  
  else f(n)+som_rec (f, ko, n-1);;
```

3.3.2 Avec affectation

```
Entrées : n(entier naturel)  
Initialisation : S ← 0  
début  
  pour k de 1 à n faire  
    S ← S+k  
  retourner S  
fin
```

Traduction XCAS en français :

```
som(n):={  
  local S;  
  S:=0;  
  pour k de 1 jusque n faire  
    S:=S+k;  
  fpour;  
  return(S)  
}
```

En anglais :

```
som(n):={  
  local S;  
  S:=0;  
  for(k:=1;k<=n;k++){S:=S+k};  
  return(S)  
}
```

On a une approche physique avec l'algorithme impératif : S vaut 0 au départ et on demande S en sortie ; S ne vaut donc plus 0 en général... Cela peut être troublant pour des élèves qui ont du mal à résoudre des équations simples et oublient ce qui se cache derrière le symbole « = ». Il y aurait une égalité en mathématiques et une autre en informatique !

Cependant, cette manière de voir peut être plus intuitive : si on considère S comme le solde de son compte en banque, on surveille son compte régulièrement en ajoutant k à chaque visite. Le compte porte le même nom, S, mais son contenu change régulièrement.

La version impérative peut de plus être directement liée à l'écriture :

$$\sum_{k=1}^n k$$

qu'on lit « somme des k pour k variant de 1 à n » où la boucle « pour » apparaît de manière naturelle.

3.4 Partie entière

On définit la partie entière d'un réel x comme étant le plus grand entier inférieur à x .

3.4.1 Sans affectation

On part du fait que la partie entière d'un nombre appartenant à $[0; 1[$ est nulle.

Ensuite, on « descend » de x vers 0 par pas de 1 si le nombre est positif en montrant que $\lfloor x \rfloor = 1 + \lfloor x - 1 \rfloor$.

Si le nombre est négatif, on « monte » vers 0 en montrant que $\lfloor x \rfloor = -1 + \lfloor x + 1 \rfloor$.

```
si x est positif et x < 1 alors
  | 0
sinon
  | si x est positif alors
  | | 1+partie_entiere(x-1)
  | sinon
  | | -1+partie_entiere(x+1)
```

En français avec XCAS :

```
partie_entiere(x):={
  si ((x>=0) et (x<1)) alors 0
  sinon si (x>0)
    alors 1+partie_entiere(x-1)
    sinon -1+partie_entiere(x+1)
  fsi
fsi
}
```

En anglais :

```
partie_entiere(x):={
  if((x>=0) and (x<1)){0}
  else{ if(x>0){1+partie_entiere(x-1)}
        else{-1+partie_entiere(x+1)}
  }
};;
```

En OCAML :

```
# let rec partie_entiere (x)=
  if x >= 0. && x < 1.
  then 0.
  else if x > 0.
    then 1. +. partie_entiere (x -. 1.)
    else -.1. +. partie_entiere (x +. 1.);;
```

Remarque : la double esperluette correspond à l'opérateur logique « ET ». OCAML travaille avec deux types de nombres : les entiers et les flottants. Les opérations avec les entiers suivent les notations habituelles. Lorsqu'on travaille avec des flottants (c'est le cas ici car x est un réel quelconque) le symbole habituel de l'opération est suivi d'un point.

On notera que l'algorithme récursif s'applique ici à des **réels** et non plus à des **entiers** : on dépasse ainsi le cadre des suites. Pour que l'algorithme fonctionne, on raisonne sur des intervalles et non plus sur une valeur initiale.

Ici, on réfléchit à la notion *mathématique* de partie entière. On met en place des résultats *mathématiques* intéressants.

3.4.2 Avec affectation

Pour les nombres positifs, on part de 0. Tant qu'on n'a pas dépassé x , on avance d'un pas. La boucle s'arrête dès que k est strictement supérieur à x . La partie entière vaut donc $k - 1$.

Dans le cas d'un réel négatif, il faut cette fois reculer d'un pas à chaque tour de boucle et la partie entière est la première valeur de k à être inférieure à x :

```

Entrées :  $x$ (réel)
Initialisation :  $k \leftarrow 0$ 
début
  | si  $x \geq 0$  alors
  | | tant que  $k \leq x$  faire
  | | |  $k \leftarrow k+1$ 
  | | | retourner  $k-1$ 
  | | sinon
  | | | tant que  $k > x$  faire
  | | | |  $k \leftarrow k-1$ 
  | | | | retourner  $k$ 
  | fin

```

Avec XCAS en Français :

```

pe(x):={
local k;
k:=0;
si x>=0 alors
  tantque k<=x faire
    k:=k+1;
  ftantque;
  return(k-1);
sinon
  tantque k>x faire
    k:=k-1;
  ftantque;
  return(k);
fsi;
};;

```

Avec XCAS en anglais :

```

pe(x):={
local k;
k:=0;
if(x>=0){
  while(k<=x){k:=k+1};
  return(k-1);
}
else{
  while(k>x){k:=k-1};
  return(k);
}
};;

```

On utilise ici une affectation (k devient $k+1$ ou $k-1$) et une « boucle while » avec un test et une action d'affectation tant que le test est vrai. Il s'agit d'un traitement physique de la mémoire. On perd un peu de vue la notion mathématique mais on donne une vision dynamique de la recherche de la partie entière : on peut imaginer un petit « personnage » se promenant sur la droite des réels en faisant des pas de longueur 1 et qui continue à avancer *tant qu'* il n'a pas dépassé le réel.

3.5 Développement en fractions continues

3.5.1 Pratique du développement

– Vous connaissez l'algorithme suivant :

$$172 = 3 \times 51 + 19 \quad (1)$$

$$51 = 2 \times 19 + 13 \quad (2)$$

$$19 = 1 \times 13 + 6 \quad (3)$$

$$13 = 2 \times 6 + 1 \quad (4)$$

$$6 = 6 \times 1 + 0 \quad (5)$$

– On peut donc facilement compléter la suite d'égalité suivante :

$$\frac{172}{51} = 3 + \frac{19}{51} = 3 + \frac{1}{\frac{51}{19}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{13}{19}} = \dots$$

– Quand tous les numérateurs sont égaux à 1, on dit qu'on a développé $\frac{172}{51}$ en fraction continue et pour simplifier l'écriture on note :

$$\frac{172}{51} = [3; 2; \dots]$$

- Par exemple, on peut développer $\frac{453}{54}$ en fraction continue.
- Dans l'autre sens on peut écrire $[2; 5; 4]$ sous la forme d'une fraction irréductible.

Nous allons construire les algorithmes correspondant.

3.5.2 sans affectation

On suppose connus les algorithmes donnant le reste et le quotient d'une division euclidienne.

```
fc(a,b)
si b=0 alors
  retourner liste vide
sinon
  retourner [quotient(a,b),fc(b,reste(a,b))]
```

En français en XCAS :

```
fc(a,b):={
  si b==0 alors []
  sinon concat(iquo(a,b),fc(b,irem(a,b)))
  fsi
};;
```

En anglais :

```
fc(a,b):={
  if(b==0)then{[]}
  else{concat(iquo(a,b),fc(b,irem(a,b)))}
};;
```

La commande **concat**(élément, liste) ajoute élément au début de liste.

Alors `fc(172, 51)` renvoie `[3, 2, 1, 2, 6]`

En OCAML

```
# let rec fc (a,b) =
  if b = 0
  then []
  else a/b :: fc(b,a-a/b*b);;
```

Pour ajouter un élément à une liste sur OCAML, la syntaxe est `élément :: liste`.

L'algorithme est très simple à écrire et à comprendre.

3.5.3 Avec affectation

```
Entrées : 2 entiers a et b
Initialisation :
num ← a
den ← b
res ← reste(num,den)
Liste ← vide
début
  tant que res ≠ 0 faire
    Liste ← Liste, quotient(num,den)
    num ← den
    den ← res
    res ← reste(num,den)
fin
retourner [Liste, quotient(num,den)]
```

En français avec XCAS :

```
frac_cont(a,b):={
local num,den,res,Liste;
num:=a;
den:=b;
res:=irem(num,den);
Liste:=NULL;
tantque res>0 faire
  Liste:=Liste, iquo(num,den);
  num:=den;
  den:=res;
  res:=irem(num,den);
ftantque
return([Liste, iquo(num,den)]);
};;
```

En anglais :

```
frac_cont(a,b):={
local num,den,res,Liste;
num:=a;
den:=b;
res:=irem(num,den);
Liste:=NULL;
while(res>0){
  Liste:=Liste, iquo(num,den);
  num:=den;
  den:=res;
  res:=irem(num,den);
}
return([Liste, iquo(num,den)]);
};;
```

Ici, la manipulation de plusieurs niveaux d'affectation et d'une boucle while est assez délicate. La chronologie des affectations est primordiale : on ne peut proposer cette version à des débutants...

3.6 Dichotomie

Pour résoudre une équation du type $f(x) = 0$, on recherche graphiquement un intervalle $[a, b]$ où la fonction semble changer de signe.

On note ensuite m le milieu du segment $[a, b]$. On évalue le signe de $f(m)$.

Si c'est le même que celui de $f(a)$ on remplace a par m et on recommence. Sinon, c'est b qu'on remplace et on recommence jusqu'à obtenir la précision voulue.

3.6.1 Sans affectation

On appellera ϵ la précision voulue.

```
si  $b-a$  est plus petit que la précision  $\epsilon$  alors
  |  $(b+a)/2$ 
sinon
  | si  $f(a)$  et  $f((b+a)/2)$  sont de même signe alors
  | | dico_rec( $f, (b+a)/2, b, \epsilon$ )
  | sinon
  | | dico_rec( $f, a, (b+a)/2, \epsilon$ )
```

On remarquera ici que la récursion se fait sans faire intervenir d'entier : le test d'arrêt est effectué sur la précision du calcul.

On va rajouter justement un compteur pour savoir combien de calculs ont été effectués.

En français avec XCAS :

```
dicho_rec(f, a, b, eps, compteur) := {
  si evalf(b-a) < eps alors 0.5*(b+a), compteur+1
  sinon si f(a)*f(0.5*(b+a)) > 0
    alors dico(f, 0.5*(b+a), b, eps, compteur+1)
    sinon dico(f, a, 0.5*(b+a), eps, compteur+1)
  fsi
};
```

```
dicho_rec(f, a, b, eps, compteur) := {
  if (evalf(b-a) < eps) {0.5*(b+a), compteur+1};
  if (f(a)*f(0.5*(b+a)) > 0) {dico(f, 0.5*(b+a), b, eps, compteur+1)}
  else {dico(f, a, 0.5*(b+a), eps, compteur+1)}
};
```

En OCAML :

```
# let rec dico_rec(f, a, b, eps, compteur) =
  if abs_float(b-.a) < eps then 0.5*(b+.a), compteur+1
  else if f(a)*.f(0.5*(b+.a)) > 0. then dico_rec(f, 0.5*(b+.a), b, eps, compteur+1)
  else dico_rec(f, a, 0.5*(b+.a), eps, compteur+1);;
```

ce qui donne :

```
# dico_rec( (fun x->(x*.x-.2.)), 1., 2., 0.00001, 0);;
- : float * int = (1.41421127319335938, 18)
```

3.6.2 Avec affectation

```
Entrées : une fonction  $f$ , les bornes  $a$  et  $b$ , une précision  $p$ 
Initialisation :  $aa \leftarrow a, bb \leftarrow b$ 
début
  tant que  $bb-aa > p$  faire
    si signe de  $f((aa+bb)/2)$  est le même que celui de  $f(bb)$  alors
    |  $bb \leftarrow (aa+bb)/2$ 
    sinon
    |  $aa \leftarrow (aa+bb)/2$ 
  retourner  $(aa+bb)/2$ 
fin
```

Avec XCAS, il faut juste ne pas oublier de régler quelques problèmes de précision. On rajoute aussi pour le plaisir un compteur qui nous dira combien de « tours de boucles » le programme aura effectué.

```
dicho(F, p, a, b) := {
  local aa, bb, k, f;
  aa := a;
```

```

bb:=b;
epsilon:=1e-100;
f:=unapply(F,x);
compteur:=0;
while(evalf(bb-aa,p)>10^(-p)){
  if( f(0.5*(bb+aa))*f(bb)>0 )
    then{bb:=evalf((aa+bb)/2,p+1)}
    else{aa:=evalf((aa+bb)/2,p+1)}
  k:=k+1;
}
return evalf((bb+aa)/2,p+1)+" est la solution trouvee apres " +(k+1)+ "iterations";
};;

```

En reprenant le même exemple :

```
dicho(x^2-2,5,1,2)
```

On obtient la même réponse :

1.414211273 est la solution trouvee apres 18 iterations

Les deux versions sont ici assez similaires avec toujours peut-être une plus grande simplicité d'écriture dans le cas récursif.

4 Algorithme récursif ne signifie pas $u_{n+1} = f(u_n)$

Si les suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ sont facilement décrites par un algorithme récursif, ce n'est pas le seul champ d'action de la récursion.

Dès qu'on connaît une situation simple et qu'on est capable de simplifier une situation compliquée, on peut utiliser la récursion.

Par exemple, reprenons l'exemple de la section 2.4 page 4 qui calcule la longueur d'une liste :

- la liste vide est de longueur nulle (cas simple) ;
- la longueur d'une liste est égale à 1+la longueur de la liste sans son premier élément.

Cela donne en traduction directe :

```

# let rec longueur = function
  [] -> 0
  | tete::corps -> 1+longueur(corps);;

```

La barre verticale permet de définir une fonction par morceaux en distinguant les cas.

L'écriture `x : liste` signifie qu'on rajoute `x` en tête de la liste `liste`.

OCAML trouvant lui-même le type des variables utilisées sait qu'on va lui entrer une liste de n'importe quoi (puisqu'on peut l'écrire sous la forme `tete` rajoutée à `corps`) et que `longueur` sera un entier (puisqu'on lui ajoute 1).

4.1 Ordre supérieur et récursion : la dérivation formelle en 2 temps 3 mouvements...

Il est facile de calculer à partir de n'importe quel langage de programmation une approximation du nombre dérivé d'une certaine fonction en un certain réel. Par exemple avec OCAML :

```
# let deriv_num(f,x,dx) = (f(x+.dx) -. f(x)) /. dx;;
```

Pour obtenir une approximation du nombre dérivé en 0 de la fonction sinus :

```
# deriv_num(sin,0.,0.00000001);;
- : float = 1.
```

Cependant, il ne faut pas oublier qu'un ordinateur ne travaille pas sur des réels mais des *flottants* en nombre fini ce qui conduit à des petites erreurs d'approximation qui peuvent s'accumuler...jusqu'à l'absurde.

Définissons en effet une fonction qui renvoie la fonction dérivée « approchée » :

```
# let fonc_deriv_num(f) = function
  x -> (f(x +. 0.0000000001) -. f(x)) /. 0.0000000001;;
```

Demandons d'évaluer ensuite la dérivée cinquième de sinus en 0 :

```
# fonc_deriv_num(fonc_deriv_num(fonc_deriv_num(fonc_deriv_num(fonc_deriv_num(sin)))))(0.);;  
- : float = -1.33226762955018773e+25
```

C'est-à-dire que $\cos(0) \approx -10^{25}$ ce qui peut laisser perplexe!

Pour remédier à ce problème, il paraît préférable de travailler avec une dérivation formelle (ou symbolique) mais cela peut sembler une tâche bien délicate.

Cependant, avec un langage permettant de définir récursivement des fonctions d'ordre supérieur, cela va se faire très rapidement.

On crée d'abord un type de variable (en plus des types existant comme int, float, list, etc.) qu'on appelle formel par exemple et qui va faire la liste et définir les expressions formelles que l'on veut dériver :

```
# type formel =  
| Int of int  
| Var of string  
| Add of formel * formel  
| Sous of formel*formel  
| Mul of formel * formel  
| Div of formel*formel  
| Ln of formel  
| Cos of formel  
| Sin of formel  
| Puis of int*formel  
| Rac of formel  
| Exp of formel;;
```

Par exemple, Var (comme variable...) sera de type formel mais prendra comme argument une chaîne de caractère (string). On entrera donc les variables à l'aide de guillemets.

De même, Add est de type formel*formel, c'est-à-dire que c'est un objet formel qui prend comme argument un couple d'objets formels.

On définit ensuite récursivement une fonction deriv qui va dériver nos expressions selon des règles que nous allons établir :

```
# let rec deriv(f, x) =  
  match f with  
  | Var y when x=y -> Int 1  
  | Int _ | Var _ -> Int 0  
  | Add(f, g) -> Add(deriv(f, x), deriv(g, x))  
  | Sous(f, g) -> Sous(deriv(f, x), deriv(g, x))  
  | Mul(f, g) -> Add(Mul(f, deriv(g, x)), Mul(g, deriv(f, x)))  
  | Div(f,g) -> Div(Sous(Mul(deriv(f,x),g),Mul(f,deriv(g,x))),Mul(g,g))  
  | Ln(f) -> Div(deriv(f,x),f)  
  | Cos(f) -> Mul(deriv(f,x),Mul(Sin(f), Int(-1)))  
  | Sin(f) -> Mul(deriv(f,x),Cos(f))  
  | Puis(n,f) -> Mul(deriv(f,x),Mul(Int(n),Puis(n-1,f)))  
  | Rac(f) -> Mul(deriv(f,x),Div(Int(1),Mul(Int(2),Rac(f))))  
  | Exp(f) -> Mul(deriv(f,x),Exp(f));;
```

Par exemple, quand la variable Var est en fait la *variable* au sens mathématique, sa dérivée est 1. En effet, Var regroupe à la fois la variable de la fonction mathématique mais aussi les paramètres formels éventuels.

La ligne suivante dit que toute autre variable (donc paramètre) et toute constante numérique entière (Int) a pour dérivée 0. Ensuite on explique comment dériver une somme, une différence, un cosinus, etc.

Par exemple, dérivons $x \mapsto kx^2$.

On définit deux variables k et x :

```
# let x , k = Var "x", Var "k";;
```

Puis on demande la dérivée :

```
# deriv(Mul(k,Puis(2,x)),"x");;
```

On obtient :

```
- : formel =
Add (Mul (Var "k", Mul (Int 1, Mul (Int 2, Puis (1, Var "x")))),
    Mul (Puis (2, Var "x"), Int 0))
```

qu'il reste à « déchiffrer »...

$$k \times 1 \times 2 \times x^1 + x^2 \times 0 = 2kx$$

Pour $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$:

```
# deriv(Ln(Div(Int(1), x)), "x");;
```

On obtient :

```
- : formel =
Div
  (Div (Sous (Mul (Int 0, Var "x"), Mul (Int 1, Int 1)),
        Mul (Var "x", Var "x")),
    Div (Int 1, Var "x"))
```

C'est-à-dire :

$$\frac{\frac{0 \times x - 1 \times 1}{x \times x}}{\frac{1}{x}}$$

Just for fun : dérivons $\ln(\ln(x))$

```
# deriv(Ln(Ln(Ln(x))), "x");;
```

On obtient :

```
- : formel = Div (Div (Div (Int 1, Var "x"), Ln (Var "x")), Ln (Ln (Var "x")))
```

C'est-à-dire :

$$\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

On devrait être extrêmement impressionné par ce qui vient d'être fait ici ! À partir de la définition d'un type de variable `formel` et d'une fonction `deriv`, on a pu calculer de manière symbolique des dérivées de toutes les fonctions étudiées au lycée ! Et on est parti de pratiquement rien sur les fonctions numériques ! On a juste précisé quelle était la règle de dérivation basique pour chacune d'elles et leur somme/produit/rapport.

La seule petite entorse à notre règle ascétique est la fonction `Puis` qui utilise la somme des entiers. On aurait pu l'écrire :

```
| Puis(n, f) -> Mul(d(f, x), Mul (Int (n), Puis(Sous (Int (n), Int (1)), f)))
```

ou ne pas la définir du tout et se contenter de `Mul(x, x)` mais bon, on a un peu gagné en lisibilité...

Il reste d'ailleurs à effectuer un traitement informatique de ces deux fonctions pour qu'elles affichent leurs résultats de manière plus lisible. Cependant, cela prendrait du temps et l'exercice consistant à décrypter les réponses peut être formateur en classe.

5 Alors : avec ou sans affectation ?

Baucoup de professeurs (et donc d'élèves...) sont habitués à traiter certains problèmes à l'aide d'un tableur...qui fonctionne récursivement !

En effet, pour étudier par exemple les termes de la suite $u_{n+1} = 3u_n + 2$ de $n = 1$ à $n = 30$ avec $u_1 = 7$, on entre = 7 dans la cellule A1 et = 3 * A29 + 2 dans la cellule A30 et on « fait glisser » de la cellule A30 jusqu'à la cellule A2. On a plutôt l'habitude de faire glisser vers le bas mais pourquoi pas vers le haut !

Passer d'un « faire glisser » à l'écriture de l'algorithme correspondant est une évolution naturelle ce que l'introduction d'un langage impératif n'est pas.

La notion de fonction est naturellement illustrée par l'utilisation d'un langage fonctionnel alors que les procédures des langages impératifs peuvent prêter à confusion.

Comme de nombreux collègues, j'assure des « colles MAPLE » en classes préparatoires scientifiques depuis plusieurs années. Les élèves de ces classes ont habituellement un niveau en mathématiques supérieur au niveau moyen rencontré en Seconde et pourtant la plupart des étudiants éprouve de réelles difficultés à maîtriser un langage de programmation impératif comme MAPLE et certains n'y arrivent pas après une année d'initiation !

Évidemment, nous n'aborderons pas les mêmes problèmes en Seconde mais pouvoir se concentrer sur les mathématiques et simplement traduire nos idées grâce au clavier de manière assez directe nous permettra de préserver nos élèves de nombreux pièges informatiques sans parler des notions trompeuses que l'affectation peut introduire dans leurs esprits.

Cependant, utiliser des algorithmes récursifs nécessite de maîtriser un tant soit peu... la notion de récurrence. Or cette étude a été réservée jusqu'à maintenant aux seuls élèves de Terminale S. L'étude des suites débute depuis de nombreuses années en Première et chaque professeur a fait l'expérience des difficultés des élèves à maîtriser cette notion.

Ainsi, même si (ou plutôt parce que) les algorithmes récursifs peuvent apparaître proches des notions mathématiques qu'ils permettent d'étudier, ils demandent de comprendre une notion mathématique délicate, la récurrence, même si l'étude des phénomènes évolutifs modélisés par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ a failli entrer au programme de Seconde !...

Il faut surtout noter que le champ d'action des algorithmes récursifs dépasse largement la notion de suite numérique. On peut raisonner récursivement dès qu'on connaît un état simple et qu'on peut simplifier un état compliqué.

D'un autre côté, les algorithmes utilisant les affectations contournent la difficulté de la récurrence, facilitent l'étude de certains mécanismes comme le calcul matriciel, permettent souvent une illustration « physique » d'un phénomène mathématique et en tous cas complémentaire des versions sans affectation.

Ils doivent de plus être étudiés car ils sont largement répandus dans le monde informatique.

Il ne faut enfin pas oublier les difficultés que pourraient rencontrer des professeurs de mathématiques n'ayant pas réfléchi à ces problèmes d'algorithmique et qui ne pourront pas être formé(e)s avant de devoir enseigner une notion méconnue, sans manuels et sans le recul nécessaire.

Mais il ne faudrait pas pour autant abandonner l'idée d'initier les élèves à une « algorithmique raisonnée ». La notion de test par exemple (SI...ALORS...SINON) est tout à fait abordable par le plus grand nombre... et dans tout style de programmation. La notion de fonction peut être étudiée sans danger avec un langage fonctionnel et avec prudence avec un langage impératif. D'un point de vue plus informatique, faire découvrir aux élèves que le « dialogue » avec la machine ne se réduit pas à des « clics » mais que chacun peut « parler » presque directement à la machine en lui tapant des instructions est également un apprentissage enrichissant.

Quant au match avec ou sans affectation, il ne peut se terminer par l'élimination d'un des participants : il faut savoir que l'un ou l'autre sera plus adapté à la résolution d'un problème et l'emploi **combiné** des deux types de programmation abordés dans cet article peut surtout permettre d'illustrer sous des angles différents une même notion mathématique et donc illustrer de manière enrichissante nos cours, ce qui induit la nécessité de connaître différentes manières de procéder pour choisir la plus efficace. Cela accroît d'autant plus la difficulté d'une introduction improvisée de l'algorithmique au lycée...

Mais les difficultés rencontrées par les étudiants débutants de l'enseignement supérieur doivent nous inciter à la prudence et à nous demander si un enseignement informatique optionnel en seconde et plus poussé dans les classes scientifiques supérieures ne serait pas plus souhaitable. On pourra lire à ce sujet l'opinion de Bernard PARISSÉ, développeur de XCAS⁵.

6 Documentation et prolongements

De nombreux algorithmes pour le lycée sont catalogués à l'adresse suivante :

<http://download.tuxfamily.org/tehessinmath/les%20pdf/PafAlgo.pdf>

Liens pour CAML :

- Une passionnante introduction à OCAML par deux de ses papas... <http://caml.inria.fr/pub/distrib/books/llc.pdf>
- Le manuel de référence de CAML par Xavier LEROY et Pierre WEIS <http://caml.inria.fr/pub/distrib/books/manuel-cl.pdf>
- Une introduction à CAML http://fr.wikibooks.org/wiki/Objective_Caml
- Ressources OCAML <http://www.pps.jussieu.fr/Livres/ora/DA-OCAML/>

Liens pour XCAS :

- la maison mère http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/%7Eparisse/giac_fr.html
- de nombreux exemples d'utilisation au lycée <http://tehessin.tuxfamily.org>

5. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/parisse/irem.html#algo>