BACCALAURÉAT BLANC

Session 2010

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la loi en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-$ i.
Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $-$ i associe le point M$'$ d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1+\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}}.$$

1. Quelle est l'image par l'application f du point O ?

2. Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1+i$?

3. Montrer que l'équation $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera.

4. Vérifier que $z' = \dfrac{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}$, en déduire $\mathrm{OM}' = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}$ et :

$$\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle $(\mathscr{C})$ que l'on précisera.

6. Soit M un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B, montrer que son image M$'$ est située sur l'axe des abscisses.

EXERCICE 2 (3 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.

3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$.
Montrer qu'elle est constante.

5. Déterminez les limites des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 3 (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

1. a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de la fonction f.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

a) On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur la figure 1 page suivante qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \mathrm{e}$ (on pourra utiliser la question 1. b.).

c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.

d) Déterminer la valeur de ℓ.

À compléter et à rendre avec la copie

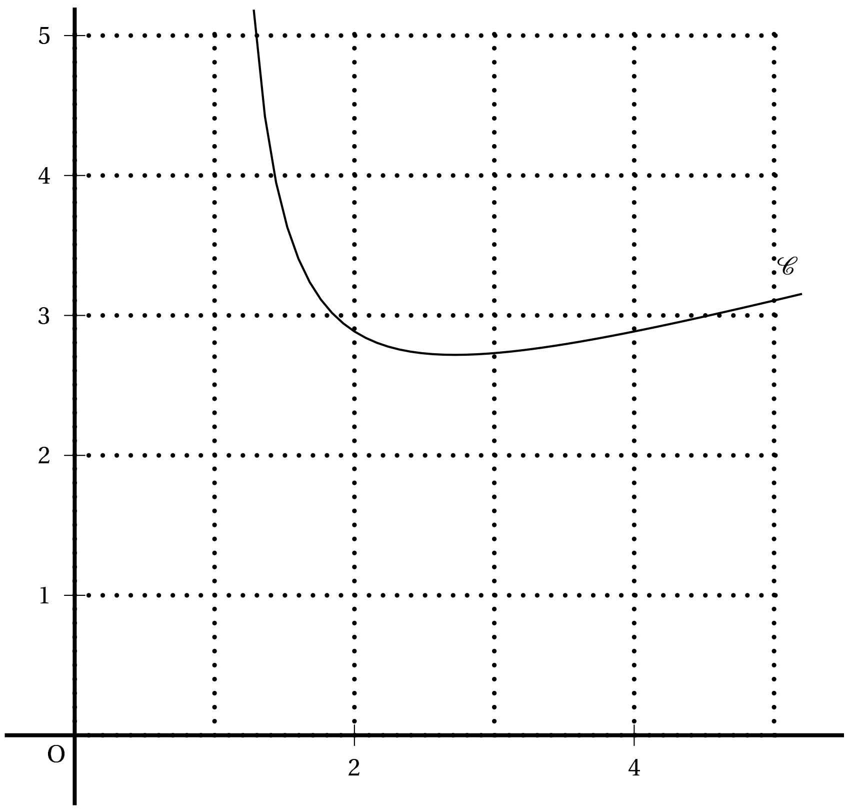

FIGURE 1 – question 2.a)

EXERCICE 4 (4,5 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}$.

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c . Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1)\, y' = \frac{y}{4}.$$

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est- à-dire $g(0) = 1$.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants (exprimé en centaines) au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2)\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(E_3)\left\{\begin{array}{lcl} h'(t) & = & -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

EXERCICE 5 (5 points)

1. Restitution organisée de connaissances

Prérequis On admettra les résultats suivants :

$$\text{Pour tout réel } a > 0 \text{ et tout réel } b > 0,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \text{et} \ln(1) = 0$$

Exprimez les nombres suivants en fonction de $\ln(a)$ ou $\ln(b)$. Vous justifierez vos réponses.

a) $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$; b) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$; c) $\ln\left(a^n\right)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour chaque question, répondre par **VRAI ou FAUX**. Les réponses devront être JUSTIFIÉES.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$.

i. $|z| = |1 - z| \iff z = \frac{1}{2}$;

ii. $-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\mathrm{i}$ est la solution de l'équation $2z + \mathrm{i}\overline{z} + 2\mathrm{i} = 0$.

b) Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

i. Pour tout réel x, $f(x) + g(x) > 0$;

ii. Pour tout réel x, $\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2 = 1$;

iii. Pour tout réel x, $2f(x) \cdot g(x) = g(2x)$.

3. a) Déterminez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^{3x} + 1\right)^2}$;

b) *i.* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$. Déterminez les réels a et b pour que la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

ii. Déterminez la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{G}(0) = \pi$.