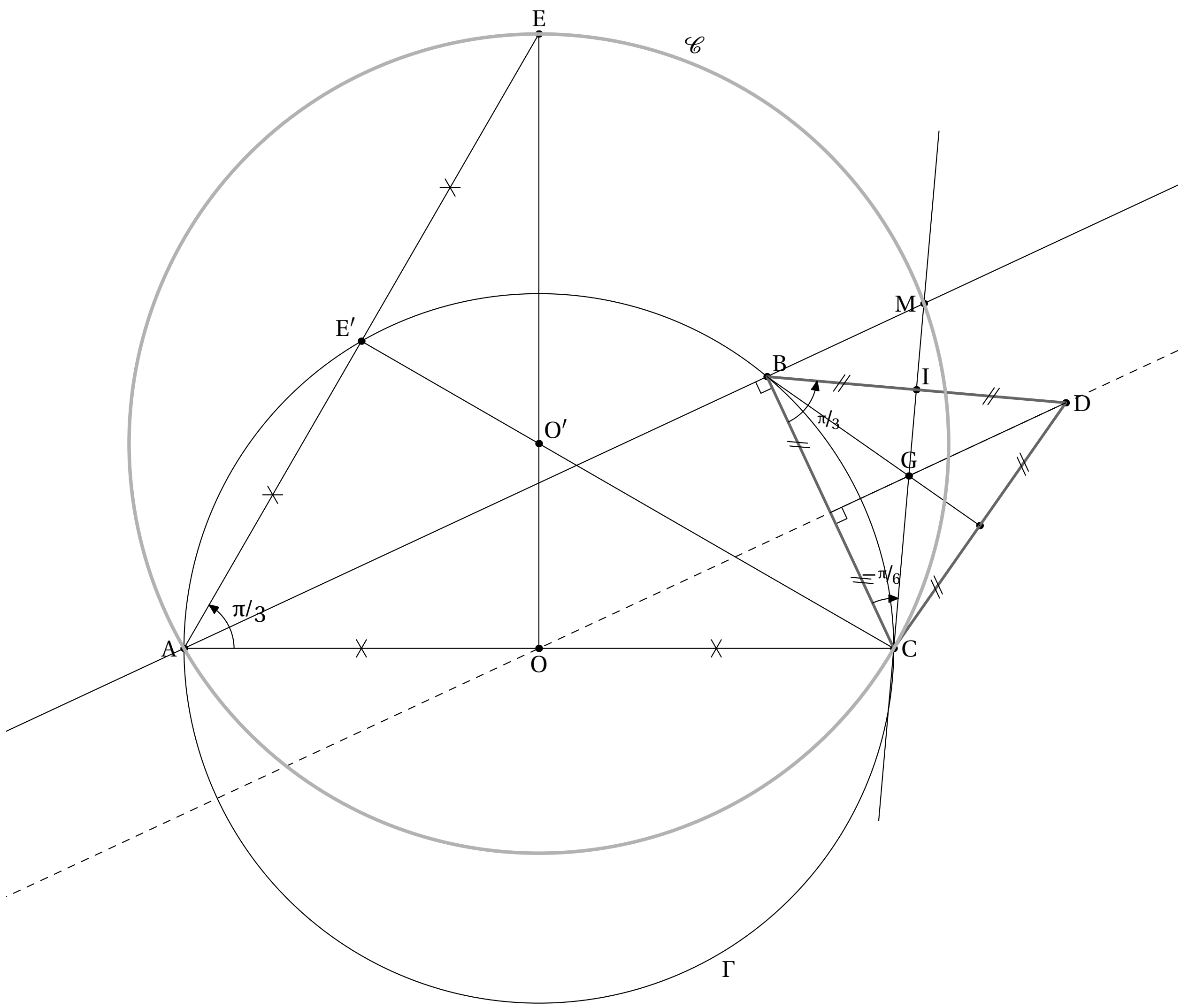
CORRIGÉ EXERCICE 2 SPÉCIALITÉ

Partie A

1. Admirez la belle figure : [0,5 point]



2. O étant le centre du cercle (Γ), on a OB = OC et donc O appartient à la médiatrice de [BC].
De plus, DB = DC car le triangle DBC est équilatéral, donc D est sur cette même médiatrice.
Enfin G est le centre de gravité du triangle équilatéral DBC : c'est donc également le centre du cercle circonscrit au triangle est lui aussi est sur la médiatrice de [BC]. [0,5 point]

B étant un point du cercle de diamètre [AC], le triangle ABC est rectangle en B. Les droites (AB) et (OG) sont donc toutes deux perpendiculaires à la droite (BC) : elles sont donc parallèles.

Dans le triangle CBM, la droite (OG) passe par le milieu du côté [CB], est parllèle au côté [BM] : elle coupe donc le troisième côté [CM] en son milieu. G est donc le milieu de [CM]. [0,5 point]

3. La médiane (CG) est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$, donc $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

De plus, soit I le milieu de [BD]. On obtient successivement :

$$CM = 2CG = 2 \times \frac{2}{3}CI = 2 \times \frac{2}{3}CB \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}CB$$

La similitude s a donc pour rapport $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ et pour angle $-\frac{\pi}{6}$. [0,5 point]

Partie B

1. Le point E est l'image de C par la rotation de centre A, donc :

$$z_E - z_A = e^{i\pi/3}(z_C - z_A)$$

On obtient $z_E = 2e^{i\pi/3} - 1 = i\sqrt{3}$. [0,5 point]

2. Soit $a = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}$. On obtient $|a| = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ puis

$$a = |a|\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}$$

Enfin, recherchons l'affixe du point invariant en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned}
&(E) \quad : \quad z = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}\\
&(E) \iff \left(1 - i\sqrt{3}\right)z = 1 - i\sqrt{3}\\
&(E) \iff z = 1
\end{aligned}$$

On en déduit que σ est la similitude de centre C, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. [$3 \times 0,25$ point]

Or $\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ qui est le rapport de s.

Les deux similitudes ont donc même centre, des rapports inverses et des angles opposés : elles sont donc réciproques l'une de l'autre. [0,5 point]

3. Après calculs, on obtient l'égalité demandée. Or $z_{E'} = e^{2i\pi/3}$, donc $|z_{E'}| = 1$ et E′ appartient au cercle de centre O et de rayon 1, c'est-à-dire le cercle Γ. [0,5 point]

4. Comme σ(E) = E′, on a $s(E') = E$. Or E′ ∈ Γ : E est donc l'image par s d'un point de Γ. On en déduit que E est sur $\mathscr{C}$.

On ne peut pas reprendre la démonstration faite à la partie A pour le triangle ACE, car B doit être différent de A.

Cependant, le triangle ACE étant équilatéral, l'image de O par s est sur la bissectrice de $\widehat{ACE}$ car $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit G′ le centre de gravité de ACE. Une démonstration analogue à celle de la question **A.3.** montre que $CG' = \frac{2\sqrt{3}}{3}CO$, donc G′ est bien l'image de O par s. [0,5 point]

Comme $\mathscr{C}$ est l'image du cercle Γ privé de a et C par la similitude s, $\mathscr{C}$ est un cercle privé des images de A et C et de centre l'image du centre de Γ, c'est-à-dire O′. [0,25 point]

On trace O′, centre de gravité de ACE puis le cercle de centre O′ et passant par E.