∽ Baccalauréat gris foncé ∽
20 mai 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans une réserve, on a regroupé dans le même parc 15 dromadaires, 10 chameaux et 5 lamas.

On rappelle que, parmi ces camélidés, le chameau a deux bosses, le dromadaire a une bosse et le lama n'a pas de bosse.

Dans cet exercice, les deux questions sont indépendantes.

1. Dix visiteurs prennent chacun en photo un camélidé choisi au hasard, de manière indépendante les uns des autres (le même animal peut donc être photographié par des visiteurs différents). On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de photos sans bosse sur les dix photos prises.
Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme de valeurs approchées à 0,01 près.

a) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux photos sans bosse.

b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux photos sans bosse.

c) Donner l'espérance et la variance de X.

2. Un visiteur prend sur la même photo trois camélidés qu'il choisit au hasard.
Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

a) Sachant que tous ces animaux ont la même probabilité d'être photographiés, établir la loi de probabilité de la variable aléatoire Y égale au nombre de bosses photographiées.

b) Calculer l'espérance mathématique de Y.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\text{i}}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
Placer les points A_0 A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout enfler naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. a) Établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \text{i}$.
En déduire la nature du triangle $\text{OA}_n\text{A}_{n+1}$.

b) Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée
$\text{A}_0\text{A}_1\text{A}_2 \dots \text{A}_{n-1}\text{A}_n$.
On a ainsi : $\ell_n = \text{A}_0\text{A}_1 + \text{A}_1\text{A}_2 + \dots + \text{A}_{n-1}\text{A}_n$.
Exprimer ℓ_n, en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 5 cm pour unité graphique.
Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M$'$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right)z + 1.$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.

2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.

a) Déterminer les affixes des points A_1 A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

c) À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

3. a) Quelle est la nature du triangle OA_0A_1 ?
En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

b) Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Partie A

(cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
On considère le point I de coordonnées $\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_1,\ y_1$ et z_1, un système d'équations paramétriques de Δ.

2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}$.

a) Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$.

b) Déterminer l'expression de k en fonction de $a,\ b,\ c,\ d,\ x_1,\ y_1$ et z_1.

c) En déduire que $IH = \dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

Le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère $\mathscr{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathscr{Q}$

3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{Q}$.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. Identifier $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur la figure fournie. (Justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Étudier le sens de variation de f et de g. Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Partie B

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{G}(x) = \int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente G pour la fonction g ?
2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $\mathrm{G}(x)$ en termes d'aires.
3. Étudier le sens de variations de G sur $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction F *sur* R *par : pour tout réel* x, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. Démontrer, que, pour tout réel x, $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{F}(x) - x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$; (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{F}(x) - x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$.
   On admet que la fonction F *admet une limite finie* ℓ *en* $+\infty$, *et que cette limite* ℓ *est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine* $\mathscr{A}$ *limité par la courbe* $\mathscr{C}_f$ *et les demi-droites* $[\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath})$ *et* $[\mathrm{O}\,;\,\vec{\jmath})$.
5. a) Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.
   b) Interpréter en termes d'aires le réel $\mathrm{N} = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   c) En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire $\mathscr{P}$ en unités d'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par la demi-droite $[\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath})$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ justifier graphiquement que :

$$\int_0^1 \left(1 - t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell}{2}.$$

   (on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)

Document à rendre avec la copie - Annexe

Exercice 4