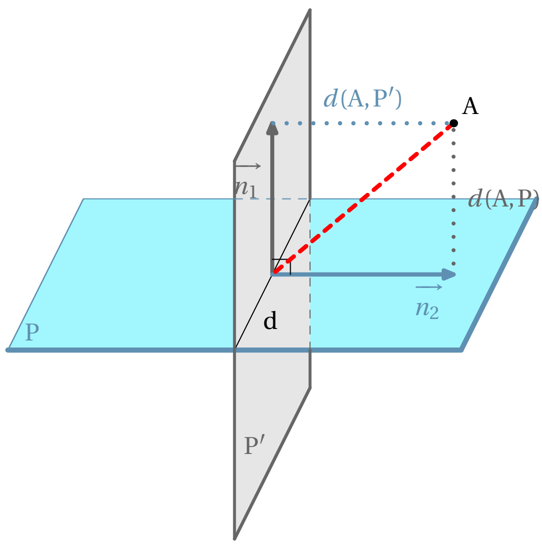
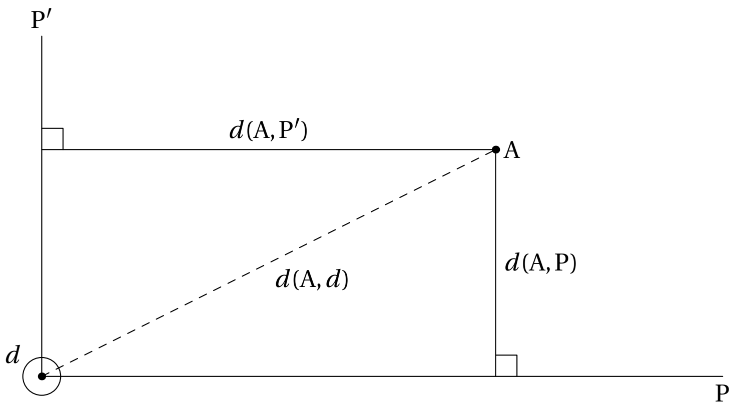
Bac S - Juin 2007 - spécialité

Exercice 1

1. Le plan (P) admet comme vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1\,;2\,;-1)$ et (P′) admet comme vecteur normal $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $(-1\,;1\,;1)$.
   Or $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u'} = -1+2-1 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux. Nous en déduisons que (P) et (P′) sont perpendiculaires.
2. Soit M_t un point quelconque de (d). Il existe donc un réel t tels que ses coordonnées sont $(-1/3+t\,;-1/3\,;t)$.
   Or les coordonnées de M_t vérifient les équations de (P) et (P′), donc la droite (d) est incluse à la fois dans (P) et dans (P′), donc dans leur intersection.
   D'autre part, les deux plans sont orthogonaux, donc leur intersection est une droite. Il s'agit donc de (d).
3. Le repère étant orthonormal, les distances sont données par
   - $\mathrm{d}(A,P) = \dfrac{|0+2-1+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$
   - $\mathrm{d}(A,P') = \dfrac{|0+1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
4. Voici la situation



Une figure dans un plan orthogonal à (d) s'impose



$d(\mathrm{A}, d) = \sqrt{\left(d(\mathrm{A},\mathrm{P})\right)^2 + \left(d(\mathrm{A},\mathrm{P}')\right)^2} = \sqrt{2}$

Exercice 2

1. Voir cours

2. a) On intégre par parties de deux manières différentes

▷ On pose $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x & u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) & v(x) = -\cos(x) \end{cases}$. On obtient $\mathrm{I} = \left[-\mathrm{e}^x \cos(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x = e^{\pi} + 1 + \mathrm{J}$

▷ On pose $\begin{cases} u(x) = \sin(x) & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$. On obtient $\mathrm{I} = \left[\mathrm{e}^x \sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0 - \mathrm{J} = -\mathrm{J}$

b) Nous en déduisons que $\mathrm{I} = -\mathrm{I} + \mathrm{e}^{\pi} + 1$ et donc

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{2} = -\mathrm{J}$$

Exercice 3

1. Notons f la similitude complexe associée à la similitude directe cherchée. Il existe deux complexes a et b tels que $f(z) = az + b$.

Nous savons de plus que $f(-5+6\mathrm{i}) = -5+6\mathrm{i}$ et que $f(3-2\mathrm{i}) = -5$. Nous en déduisons que a et b vérifient le système :

$\begin{cases} (-5+6\mathrm{i})a + b = -5+6\mathrm{i} \\ (3-2\mathrm{i})a + b = -5 \end{cases}$

On obtient $a = \frac{3}{8}(1-\mathrm{i})$ et $b = \frac{1}{8}(-43+15\mathrm{i})$. Or $|a| = \frac{3\sqrt{2}}{8}$ et $\mathrm{Arg}(a) = -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$, donc f est la similitude de centre A, d'angle $-\pi/4$ et de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

2. a) Cette fois, a et b vérifient le système $\begin{cases} (-5-6\mathrm{i})a + b = -5+6\mathrm{i} \\ (3+2\mathrm{i})a + b = 3-2\mathrm{i} \end{cases}$

On obtient $a = -\mathrm{i}$ et $b = 1+\mathrm{i}$.

La similitude s admet au moins deux points invariants. C'est donc la réflexion d'axe (AC).

b) Soit σ l'application complexe associée à s. Alors $\sigma(-5) = \overline{(-5)}\,(-\mathrm{i}) + 1 + \mathrm{i} = 1 + 6\mathrm{i}$

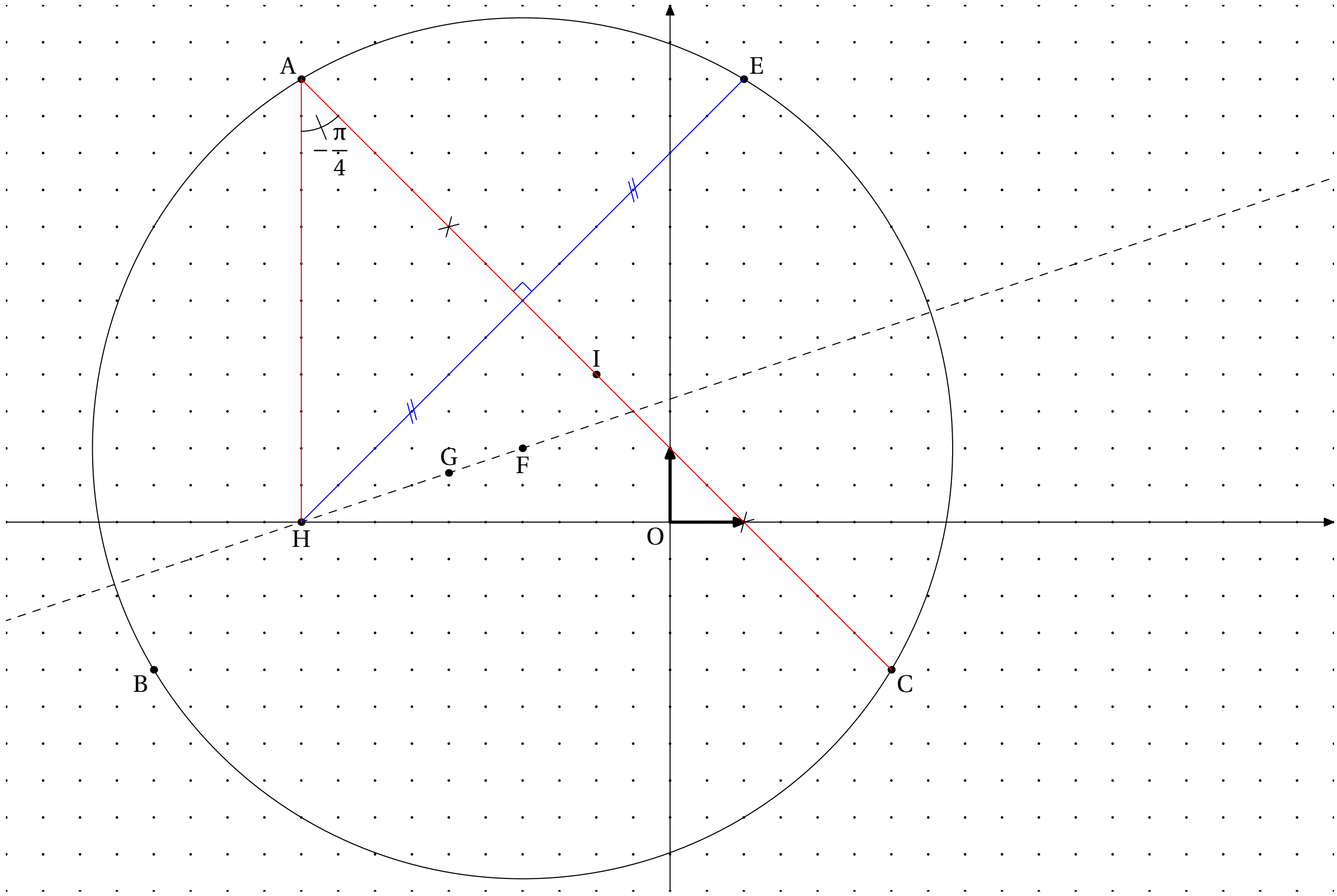
c) Le rayon de Γ vaut FA. $\mathrm{FA} = |-5+6\mathrm{i} - (-2+\mathrm{i})| = \sqrt{34}$. Or $\mathrm{FE} = |1+6\mathrm{i} - (-2+\mathrm{i})| = \sqrt{34} = \mathrm{FA}$, donc E appartient à Γ.

3. Soit h l'homothétie complexe associée. Alors h vérifie $h(z) - (-7-2\mathrm{i}) = \frac{2}{3}(z - (-7-2\mathrm{i}))$, c'est-à-dire

$$h(z) = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}(-7-2\mathrm{i})$$

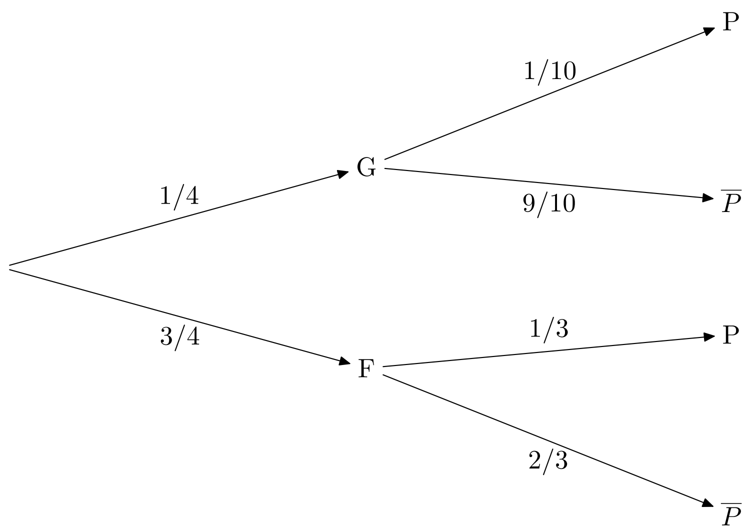
Or I a pour affixe $\frac{1}{2}(-5+6\mathrm{i}+3-2\mathrm{i}) = -1+2\mathrm{i}$, donc G a pour affixe $\frac{2}{3}(-1+2\mathrm{i})+\frac{1}{3}(-7-2\mathrm{i}) = \frac{-9+2\mathrm{i}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ a pour affixe $\frac{-9+2\mathrm{i}}{3}+5 = \frac{6+2\mathrm{i}}{3}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HF}}$ a pour affixe $-2+\mathrm{i}+5 = 3+\mathrm{i}$. Nous en déduisons que $\overrightarrow{\mathrm{HG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{HF}}$ et donc que H, G et F sont alignés.



Exercice 4

1. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de produits vendus. X suit la loi $\mathscr{B}(5\,;0,2)$.
   Donc $\mathbb{P}(X=2) = \binom{5}{2}\times 0,2^2\times 0,8^3 = 0,2048$. **Réponse d**
2. Dessinons un arbre



$\mathbb{P}(\mathrm{P}) = \mathbb{P}(\mathrm{G}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P}) + \mathbb{P}(\mathrm{F}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{F}}(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = 0,275$ **Réponse b**

3. $\mathbb{P}_{\mathrm{P}}(\mathrm{G}) = \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{P} \cap \mathrm{G})}{\mathbb{P}(\mathrm{P})} = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10}}{0,275} = \simeq 0,091$ **Réponse b**

4. $\mathbb{P} = \dfrac{\pi \times 30^2 - \pi \times 20^2}{\pi \times 30^2} = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$ **Réponse a**

Exercice 5

Partie A

1. $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{x(x+2) + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$

2. N est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$. $\mathrm{N}'(x) = 2(1+x) + \dfrac{1}{1+x}$. Or $x > -1$, donc $\mathrm{N}'(x) > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$.

$\mathrm{N}(0) = 0$ est donc le minimum de N sur $]0\,;+\infty[$. N est donc positive sur $]0\,;+\infty[$ et négative sur $]-1\,;0[$

x	-1	0	$+\infty$
Variations de $\mathrm{N}(x)$	?	0	?

Or $f'(x) = \dfrac{\mathrm{N}(x)}{(1+x)^2}$. Nous en déduisons que $f'(x) \geqslant 0$ sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $]-1\,;0]$ et donc que f est croissante sur $]0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-1\,;0]$.

3. Résolvons l'équation (E) : $f(x) = x$.

(E) $\iff x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = x$

(E) $\iff \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$

(E) $\iff \ln(1+x) = 0$

(E) $\iff x = 0$

Donc le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ est O.

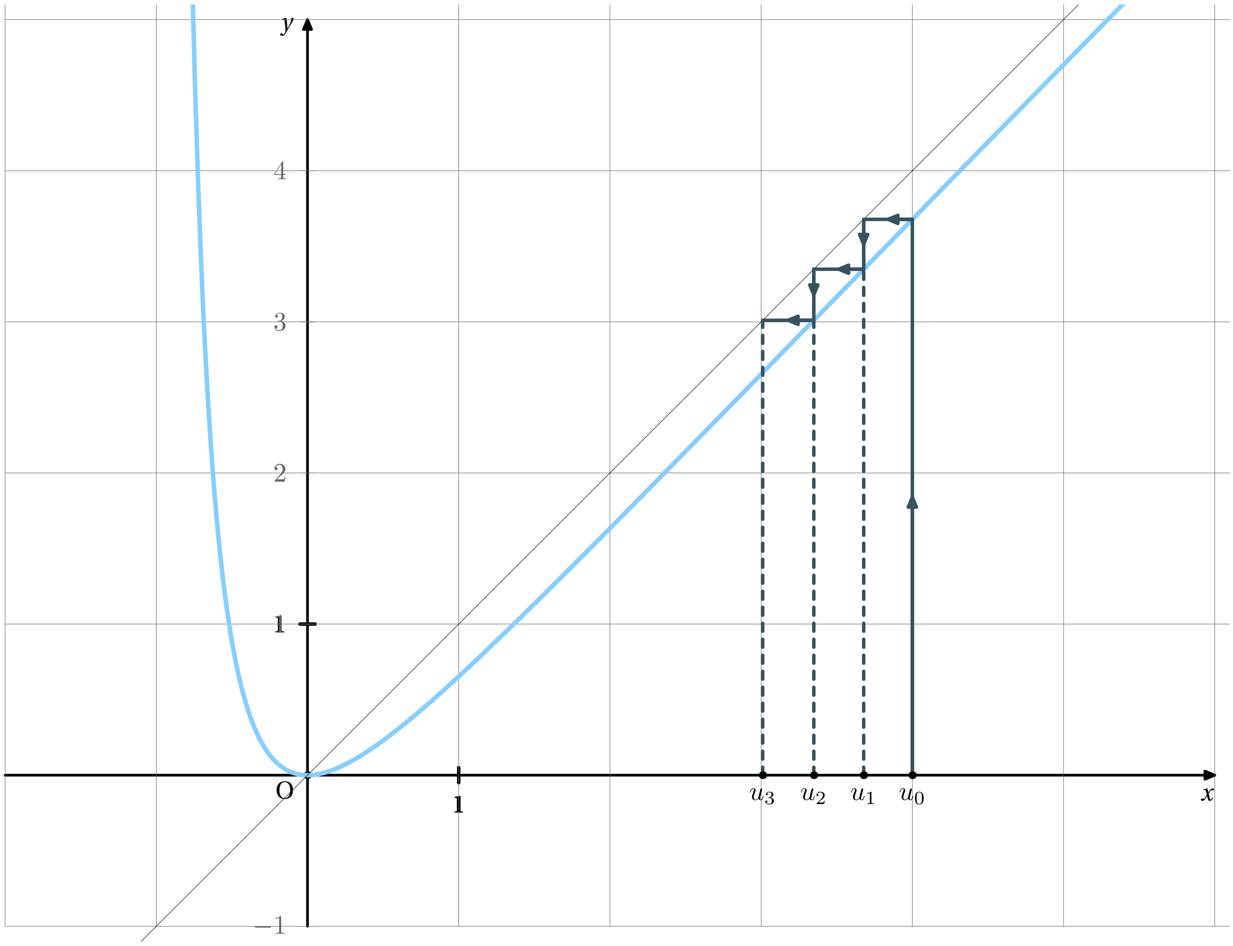
Partie B

1. Comme f est croissante sur $]0\,;+\infty[$, elle conserve l'ordre.

Ainsi, si $x \in [0\,;4]$, alors $f(0) = 0 \leqslant f(x) \leqslant f(4) = 4 - \dfrac{\ln(5)}{5} \leqslant 4$.

x	-1	0	4	$+\infty$
Variations de $f(x)$	?	0	$4 - \ln(5)/5$	?

a) On obtient



b) Sachant que $u_0 = 4 \in [0\,;4]$, et que si $u_n \in [0\,;4]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0\,;4]$ d'aprés B-1, nous en déduisons par une récurrence immédiate que pour tout entier n, $u_n \in [0\,;4]$.

c) $u_1 = f(u_0) \leqslant u_0$ car f est croissante sur $[0;4]$. On en déduit par une récurrence immédiate que la suite (u_n) est elle-même décroissante.

d) La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel ℓ.

e) La fonction f étant continue sur l'intervalle fermé $[0\,;4]$ et à valeurs dans cet intervalle, et la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ étant convergente, la limite ℓ de f est un point fixe de f.
D'après A-3, on en déduit que $\ell = 0$ puisque 0 est le seul point fixe de f.