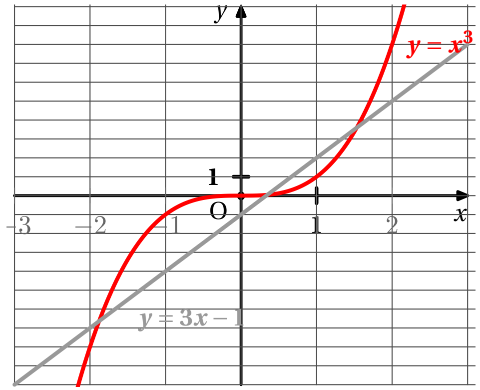
Exercice 1 Résolution d'une équation

1. (E) $\iff x^3 = 3x - 1$. Les solutions de (E) sont donc les abscisses des points communs à la courbe d'équation $y = x^3$ et à la droite d'équation $y = 3x - 1$.
(E) semble admettre trois solutions.



2. a) En tant que fonction polynôme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

Le trinôme $f'(x)$ est du signe de 3 à l'extérieur de l'intervalle des racines.
Pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ et pour tout $x \in]-1; 1[$, $f'(x) < 0$.
Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$ **et sur** $[1; +\infty[$.
De plus f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.

b) Par lecture du tableau de variation, on obtient que l'équation (E) admet exactement 3 solutions sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α_1		-1		α_2		1		α_3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Variations de $f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) En utilisant la touche `Solve` de la calculatrice, on obtient :
$\alpha_1 \approx -1,879$ à 10^{-3} près par excès.
$\alpha_2 \approx 0,347$ à 10^{-3} près par défaut.
$\alpha_3 \approx 1,532$ à 10^{-3} près par défaut.

Exercice 2 Étude d'une fonction

Partie A : étude de f

1. Pour tout réel x, $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + |-x|} = \sqrt{x^2 + |x|} = f(x)$, donc f est impaire et $\mathscr{C}_f$ admet l'axe $\left(O; \vec{\jmath}\right)$ comme axe de symétrie.
Il suffit donc d'étudier la courbe sur $[0; +\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$, $\lim\limits_{T\to+\infty} \sqrt{T} = +\infty$, donc, par composition des limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3. Pour $h > 0$, $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2+h}}{h} = \sqrt{1+\frac{1}{h}}$. Or $\lim\limits_{h\to0}\left(1+\dfrac{1}{h}\right) = +\infty$, donc $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$.
On en déduit que f n'est pas dérivable en 0 et que $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

4. Sur $]0; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2+x}$, donc $f'(x) = (2x+1)\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$ qui est strictement positif sur $]0; +\infty[$.

5. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	‖	$+$	
Variations de $f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : asymptotes à $\mathscr{C}_f$

1. a) Pour tout $x > 0$,

$$f(x) - x - \frac{1}{2} = \sqrt{x^2 + x} - x - \frac{1}{2} = \sqrt{x^2 + x} - x - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}} = \frac{x^2+x-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}$$

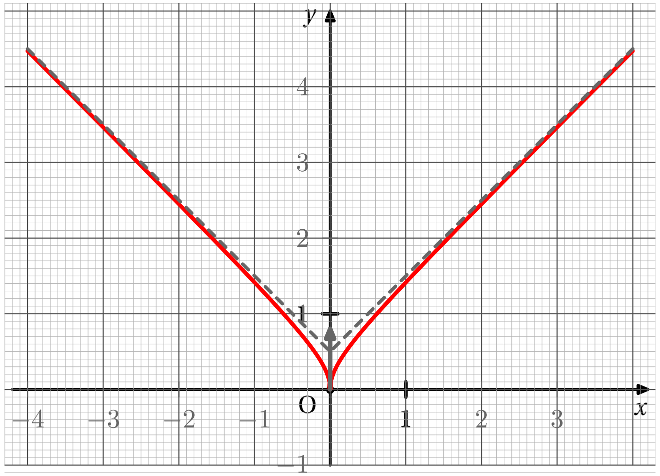
$$= \frac{-1}{4\left(\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}\right)}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x + \dfrac{1}{2})\right) = 0$ et donc que $\mathscr{C}_f$ admet la droite $\mathscr{D}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

b) Pour tout $x > 0$, $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4\left(\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}\right)} < 0$, donc $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{D}$ sur $[0\,;+\infty[$

2. Par symétrie, on en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ au voisinage de $-\infty$.

3. Et voilà le travail :



Exercice 3 Un peu de trigo

$$\begin{aligned}
\cos(3t) &= \cos(2t + t)\\
&= \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t\\
&= (2\cos^2 t - 1)\cos t - 2\sin^2 t \cos t\\
&= 2\cos^3 t - \cos t - 2(1 - \cos^2 t)\cos t\\
&= 2\cos^3 t - \cos t - 2\cos t + 2\cos^3 t
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t}$$

Exercice 4 Question subsidiaire

En base 2, 10 signifie 2....