Devoir surveillé de mathématiques n°2 - T$^{\text{ale}}$S4 - Jeudi 5 novembre 2009 - 2 heures

Exercice 1 Cours

Énoncer le théorème de la bijection, la définition de la continuité et celle de la dérivabilité d'une fonction f en un réel a.

Exercice 2

Étudier les limites des fonctions suivantes :

1. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$;
2. $\dfrac{\sin(x)}{x}$ en 0 ;
3. $\dfrac{\tan(x)}{x}$ en 0 ;
4. $\dfrac{\sin(3x)}{x}$ en 0 ;
5. $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sqrt{x^2+|x|}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : étude de f

1. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe $\left(O;\vec{\jmath}\right)$
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Étudier la dérivabilité de f en zéro. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Étudier le sens de variation de f.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : asymptotes à $\mathcal{C}$

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=x+1/2$

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
2. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
3. Prouver que $\mathcal{C}$ admet une autre asymptote dont on donnera une équation.

Partie C : résolution d'une équation

Soit n un entier naturel non nul.

1. À l'aide de l'étude de la fonction f, montrer que l'équation d'inconnue x, $f(x)=n$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On note a_n cette solution.
2. Exprimer a_n en fonction de n sans avoir recours à l'étude de la fonction f.

Exercice 4

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 3 cm. Soit A, B et C les points d'affixes respectives i, $1+i$ et $-1-i$.

On appelle f l'application du plan $\mathcal{P}$ privé de A dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z ($z\neq i$) associe le point M′ d'affixe z' définie par :

$$z'=\frac{z^2}{i-z}$$

1. Déterminer les affixes sous forme algébrique des points B′ et C′, images de B et C par l'application f.
2. Déterminer les affixes sous forme algébrique des points invariants par f.
3. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec x, y, x' et y' réels.
   a) Exprimer la partie réelle de z' en fonction de x et y.
   b) En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M(z) tels que z' soit un imaginaire pur.