SGM1 Devoir surveillé de mathématiques n°2

.
Mardi 17 janvier 2006

NOM : GROUPE :

L'usage des calculatrices et de la copie du (de la) voisin(e) est interdit

EXERCICE 1

Soit $F(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 20x - 8}{x^2 + 2x + 10}$

1. Déterminez les pôles complexes de F.

2. Effectuez la division euclidienne de $2x^3 + 3x^2 + 20x - 8$ par $x^2 + 2x + 10$.

3. Déduisez-en la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

4. Calculez alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} F(x)\,dx$

.

EXERCICE 2

1. Linéarisez $\cos^3 x$ à l'aide de la formule d'Euler.

2. Déduisez-en $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{2\pi/3} \cos^3 x \, \mathrm{d}x$

EXERCICE 3

On rappelle que les coordonnées du centre de gravité d'une plaque homogène limité par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = f(x)$ sont données par les formules

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \qquad y_G = \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_a^b \left(f(x)\right)^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Calculez ces coordonnées dans le cas où $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = 2e^{-3x}$.

.

.

EXERCICE 4

Calculez les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{6}+1} \frac{4}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

.

MINI-FORMULAIRE

$f(x) =$	$f'(x) =$
$u+v$	$u'+v'$
$\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$u \circ v$	$v' \times u' \circ v$
e^u	$u'e^u$
$\operatorname{Arctan} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$
u^n	$nu^{n-1}u'$

Rappel : règles de Bioche. Soit $\mathrm{F}(\sin x, \cos x)$ une « fraction rationnelle en cos et sin » alors on calcule $\int \mathrm{F}(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ en effectuant un changement de variable selon les régles suivantes : si $\mathrm{F}(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ est invaraint quand on change

- ▹ x en $\pi - x$, alors on effectue le changement de variable $\sin x = t$
- ▹ x en $-x$, alors on effectue le changement de variable $\cos x = t$
- ▹ x en $\pi + x$, alors on effectue le changement de variable $\tan x = t$

Si aucun changement ne fonctionne, on pose $\tan(x/2) = t$.

Identités rarquables $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3$ $\qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + c^3$