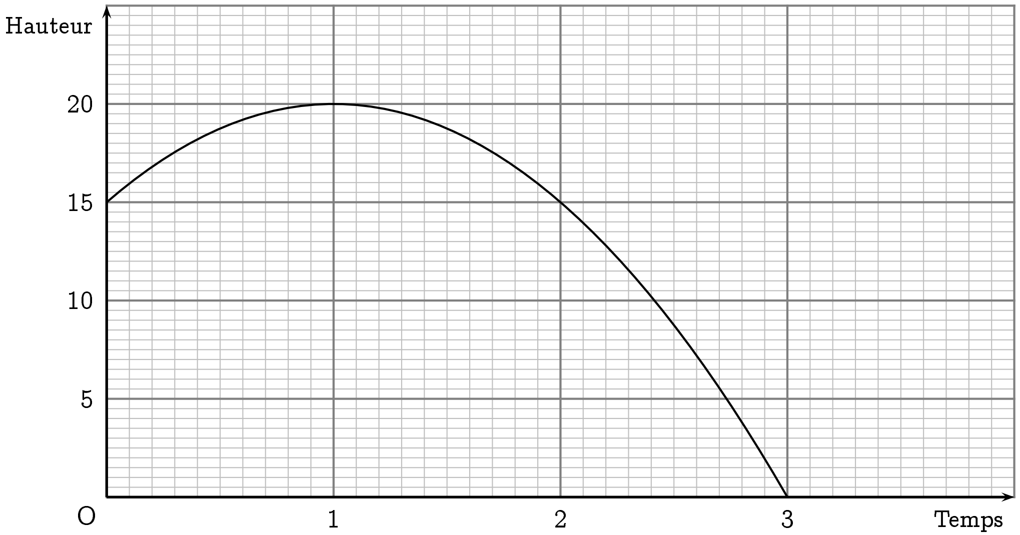
DS de mathématiques n°1 - Samedi 10 octobre - 2 heures - Calculatrices interdites - 2nde4

Exercice 1

Un berger syldave s'entraîne pour le championnat national de lancer de brebis. Il s'est inscrit dans la catégorie « falaise » : il lance donc sa brebis vers le haut, depuis le sommet d'une falaise donnant sur un lac tranquille. La hauteur en mètres de la brebis par rapport à la surface de l'eau est une fonction f du temps en seconde, représentée par la courbe (P).

Partie A : Étude graphique



Avec la précision permise par la lecture du graphique précédent, répondre aux questions suivantes. Vous donnerez également à chaque fois une expression mathématique utilisant la fonction f (par exemple « Calculons $f(3)$ » ou « $f(x) = 3$ », etc.)

1. À quelle hauteur se trouve la brebis au moment où le professeur la lance ?
2. Pendant combien de temps, la brebis reste-t-elle à une hauteur supérieure à la hauteur d'où elle a été lancée ?
3. Au bout de combien de temps la brebis touche-t-elle la surface de l'eau avant de s'y enfoncer ?
4. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la brebis et au bout de combien de temps cette hauteur est-elle atteinte ?
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Partie B : Etude théorique

La fonction f est en fait définie sur $[0;3]$ par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$, où x désigne le temps en secondes et $f(x)$ la hauteur de la brebis par rapport à la surface de l'eau en mètres.

1. Vérifiez que $f(x)$ peut s'écrire $20 - 5(x-1)^2$.
2. Factorisez $f(x)$ et résolvez l'équation $f(x) = 0$ sur $[0;3]$.
   Que représente la solution dans l'expérience du lancer de brebis ?
3. Résolvez l'équation $f(x) = 20$ puis l'inéquation $f(x) \leqslant 20$. Comment interpréter ce résultat concernant l'expérience du lancer de brebis ?
4. Calculez :
   a) l'image de 10^3 par f ;
   b) l'image de $\frac{2}{3}$ par f ;
   c) l'image de $\sqrt{2}$ par f ;
   d) l'image de $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ par f. Vous écrirez le résultat sans radical au dénominateur.
5. Le berger aime-t-il la soupe de potimaron ?

Exercice 2

1. Montrer que $\sqrt{1+\frac{3}{5}} \times \sqrt{1-\frac{3}{5}}$ est rationnel.
2. Montrer que $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})$ et $(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2$ sont des entiers.
3. Montrer que $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$ est un rationnel.
4. Plus généralement,montrer que les nombres $\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2$ le sont aussi.

Exercice 3

Un fil de section S comporte n électrons par unité de volume se déplaçant à la vitesse v. L'intensité I du courant circulant dans ce fil est donnée en ampère par la formule :

$$I = nSqv$$

où q désigne une charge électrique.

On donne :

$n = 6 \times 10^{26}\ m^{-3}$ | $v = 2 \times 10^{-3}\ m.s^{-1}$

$q = 1{,}5 \times 10^{-19}\ C$ | $S = 1{,}2 \times 10^{-6}\ m^2$.

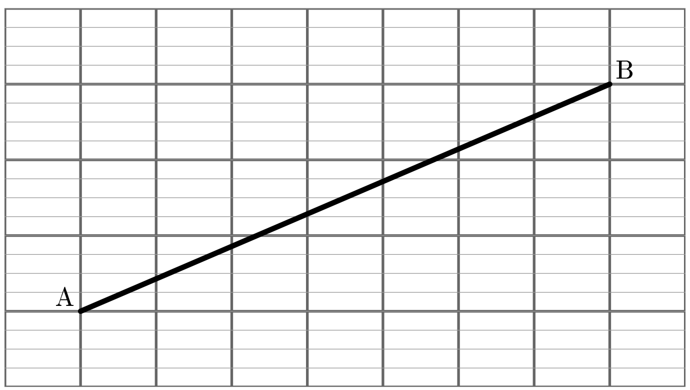
Faire le calcul de I, en ampère, en donnant le résultat le plus simple possible.

Exercice 4

1. Écrire le nombre suivant sans radical au dénominateur : $A = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

2. Écrire sous forme de fraction irréductible : $B = \dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$.

Exercice 5



En utilisant le quadrillage, placer les points I, J, K et L du segment [AB] tels que :
$\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{AJ}{AB} = \dfrac{5}{7}$; $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{BL}{BA} = \dfrac{1}{12}$.

Exercice 6

Le but de cet exercice est de calculer la valeur exacte de $\sin 15°$

Dans la figure ci-dessous qui n'est pas représentée en vraie grandeur, ABC est un triangle équilatéral de côté 2 pour lequel [AH] est une médiatrice, BCD est un triangle rectangle isocèle en D, et K est le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ABD.

1. a) Calculez les valeurs exactes des longueurs BD, DH, AH et AD.

   b) Déduisez-en la valeur exacte de l'aire du triangle ABD.

2. Dans cette question, on *n'utilisera pas* les résultats de la question 1.

   a) En justifiant votre réponse, donnez la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$.

   b) Démontrez que $KD = \sqrt{2} \times \sin 15°$.

   c) Déduisez de la question précédente, l'expression de l'aire du triangle ABD en fonction de $\sin 15°$.

3. Démontrez que $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$