UNIVERSITÉ DE NANTES

TROISIÈME SEMESTRE, 2014-2015

IUT - Département d'informatique

Devoir Surveillé - Probabilités

Durée : quatre-vingts minutes / cent sept en cas de tiers temps

CONSIGNES: Vous justifierez vos réponses avec le plus grand soin. UNE calculatrice (type lycée) est autorisée à l'exclusion de tout autre engin relié à un quelconque réseau ou pouvant faire office de téléphone n'est autorisé. Une feuille de format A5 recto-verso manuscrite peut être consultée pendant le DS sous réserve d'acceptation du jury. Vous ne rendrez que les feuilles de réponses (numérotées de 3 à 6) SANS L'AGRAFE et en écrivant votre nom sur les deux feuilles. Vous ne devez avoir sur la table que votre sujet, le brouillon distribué, éventuellement une calculatrice et 2 stylos.

Exercice 1.

On lance 10 fois de suite de manière indépendante une pièce de monnaie déséquilibrée qui donne FACE avec une probabilité de p.

a. Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire F égale au nombre de FACE obtenus sur ces 10 lancers.

b. On rappelle que la fonction `random()` de la bibliothèque `random` renvoie sur Python un flottant uniformément choisi entre 0 et 1. Déterminez une fonction Python dépendant de p et qui simule 10 000 expériences précédentes. Cette fonction doit retourner un dictionnaire dont les clés sont les valeurs prises par F et les valeurs sont les effectifs observés.

On pourra utiliser la fonction `Counter` de la bibliothèque `collections`

Exercice 2.

Le jeu de la boule est un jeu de casino similaire à celui de la roulette, mais avec les chiffres de 1 à 9. Il est possible de miser sur rouge, noir, un numéro.
Les chiffres 1, 3, 6, 8 sont noirs. Les chiffres 2, 4, 7, 9 sont rouges.
Le chiffre 5 n'est ni rouge, ni noir. Si le 5 sort, la mise jouée sur une couleur perd.
Si la couleur misée sort, le joueur gagne 2 fois la mise, sinon la mise est perdue.
Si le numéro misé sort (5 compris), le joueur gagne 8 fois la mise sinon la mise est perdue.
Dans un casino du Sud-Ouest, le jeu de boule est constitué de 27 logements pour la boule numérotés uniformément entre 1 et 9 (il y a trois 1, trois 2, etc.).

a. Un joueur mise a € sur une couleur. Soit C la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouvez la loi de C puis calculez $\mathbb{E}(C)$ et $\sigma(C)$.

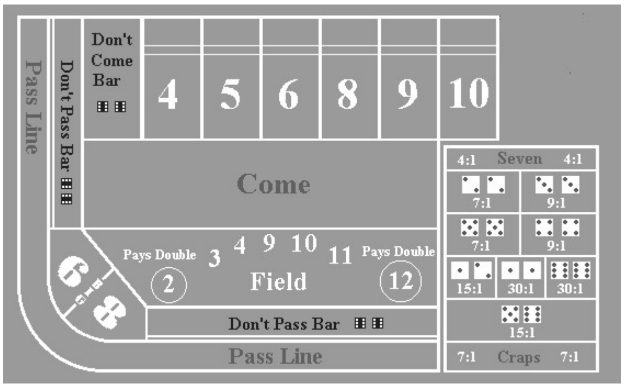
b. Un joueur mise a € sur un numéro. Soit N la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouvez la loi de N puis calculez $\mathbb{E}(N)$ et $\sigma(N)$.

T.S.V.P.

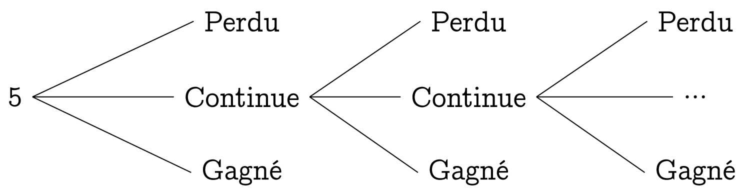
Exercice 3.
On rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ avec e la base du logarithme népérien.
Soit X une v.a.r. telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$ et $\Pr(\{X = n\}) = \frac{\lambda}{n!}$.

- **a.** Déterminez λ pour que Pr vérifie le deuxième axiome de Kolmogorov.
- **b.** Calculez $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 4.
Le craps (ou la passe anglaise) est un jeu de dé. On jette deux dés et on additionne les numéros des faces obtenues. Si on obtient 7 ou 11 du premier coup on gagne. Si on obtient 2, 3 ou 12 du premier coup, on perd.
Dans les autres cas, on rejoue jusqu'à obtenir à nouveau la somme obtenue en premier mais si on fait 7, on perd. Par exemple, la séquence 6 5 8 12 5 10 6 est gagnante, la séquence 6 5 8 7 est perdante.



- **a.** On lance deux dés. On note S la somme des faces obtenues. Donnez la loi de probabilité de S.
- **b.** Quelle est la probabilité de gagner après un lancer ? Quelle est la probabilité de perdre après un lancer ?
- **c.** Supposez que le premier lancer donne une somme de 5.
  - **i.** Quelle est la probabilité de gagner au lancer suivant (le deuxième) sachant que le premier lancer donne une somme de 5 ? De perdre au deuxième lancer sachant que le premier lancer donne une somme de 5 ? De continuer à lancer sachant que le premier lancer donne une somme de 5.
  - **ii.** Quelle est la probabilité de gagner au troisième lancer sachant que le premier lancer donne une somme de 5 ? Au n-ème lancer sachant que le premier lancer donne une somme de 5 ?
  - **iii.** Complétez un arbre de ce style avec les probabilités utiles :



  - **iv.** Déduisez-en la probabilité de gagner sachant que le premier lancer donne une somme de 5. On rappelle que
$$\forall q \in \mathbb{R},\ |q| < 1 \to \sum_{n \geqslant 0} q^n = \frac{1}{1-q}$$
  - **v.** Déduisez-en la probabilité de gagner au craps. Vous donnerez votre résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme décimale approchée à 10^{-2} près. Le jeu est-il équitable ?

Prénom: ______________________ NOM: ______________________ Groupe: ______

Exercice 1.

a.

b.

Exercice 2.

a.

b.

Exercice 3.

a.

b.

Prénom: ______________ NOM: ______________ Groupe: ______

Exercice 4.

a.

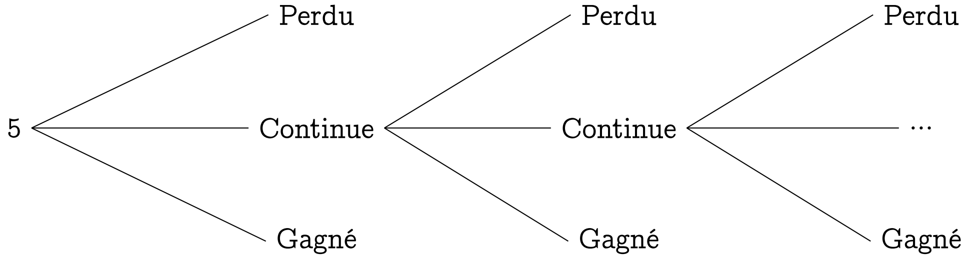
b.

c.

i.

ii.

iii.



iv.

v.