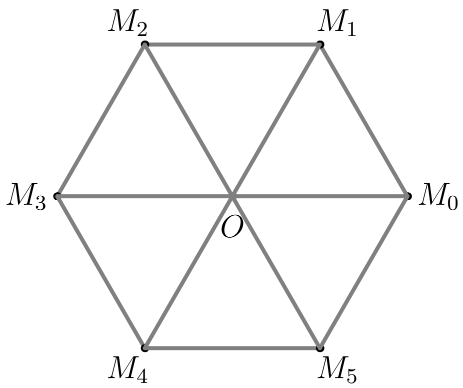
2$^{\text{nde}}$ 12 - D.S. de mathématiques - Samedi 17 janvier 2009 - 2 heures

Exercice 1

Voici un magnifique hexagone régulier de centre O :



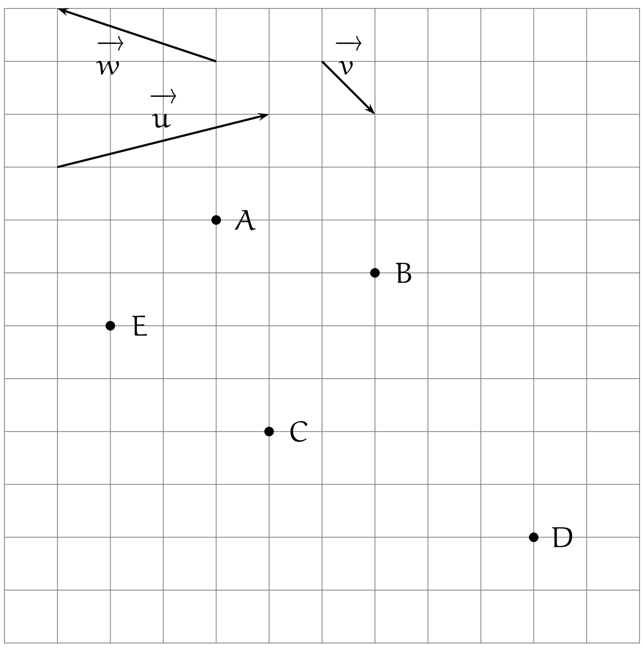
En utilisant uniquement les points de la figure ci-dessus, exprimez les vecteurs suivants à l'aide d'un seul vecteur :

1. $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_5M_4}$
2. $\overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_2M_3}$
3. $\overrightarrow{M_0M_1} - \overrightarrow{M_1M_2}$
4. $\overrightarrow{M_1M_0} + \overrightarrow{M_2M_5} + \overrightarrow{M_4M_3} - \overrightarrow{M_3O}$
5. $\overrightarrow{M_4O} + \overrightarrow{M_1M_0} + \overrightarrow{M_4M_5}$
6. $\overrightarrow{M_3M_1} - \overrightarrow{M_4M_5}$

Exercice 2

En utilisant le quadrillage, construire :

1. Le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$
2. Le point B' tel que $\overrightarrow{BB'} = \vec{v} + \vec{w}$
3. Le point C' tel que $\overrightarrow{CC'} = \vec{u} + \vec{v}$
4. Le point D' tel que $\overrightarrow{DD'} = \vec{w} - \vec{v}$
5. Le point E' tel que $\overrightarrow{EE'} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
6. Le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
7. Le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}$
8. Le point H tel que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BA}$
9. Le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}$
10. Le point J tel que $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$



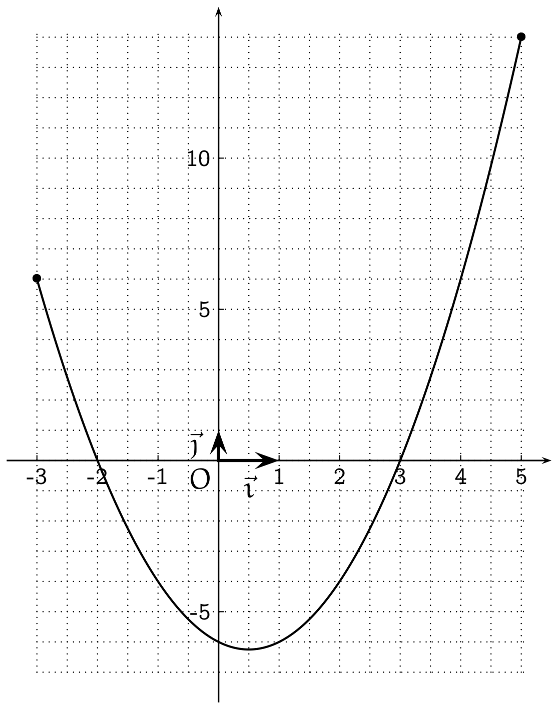
Exercice 3

Recopier et compléter chaque égalité en utilisant la relation de Chasles.

1. $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{\ldots B}$
2. $\cdots = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{\ldots M}$
3. $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{\ldots B} + \ldots$
4. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \ldots$
5. $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{C\ldots}$
6. $\cdots = \overrightarrow{U\ldots} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{\ldots S}$
7. $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{\ldots P} + \cdots + \overrightarrow{TB}$
8. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{\ldots B} + \overrightarrow{\ldots}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-3;5]$ par $f(x) = x^2 - x - 6$.
Ci-contre, on donne $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f.



1. Déterminer graphiquement :
   - $f(0)$: ....
   - l'image de 3 par f : ....
   - les éventuels antécédents de -4 par f : ....
   - les éventuels antécédents de 10 par f : ....
   - les éventuels antécédents de -6 par f : ....
   - l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 5 : ....
   - les solutions de l'équation $f(x) = 3$ ....
2. Déterminer algébriquement l'image de $\frac{1}{2}$ par f.
3. Montrer que pour tout x de $[-3;5]$, $f(x) = (x-3)(x+2)$.
4. Retrouver algébriquement les antécédents de 0 par f.

Exercice 5

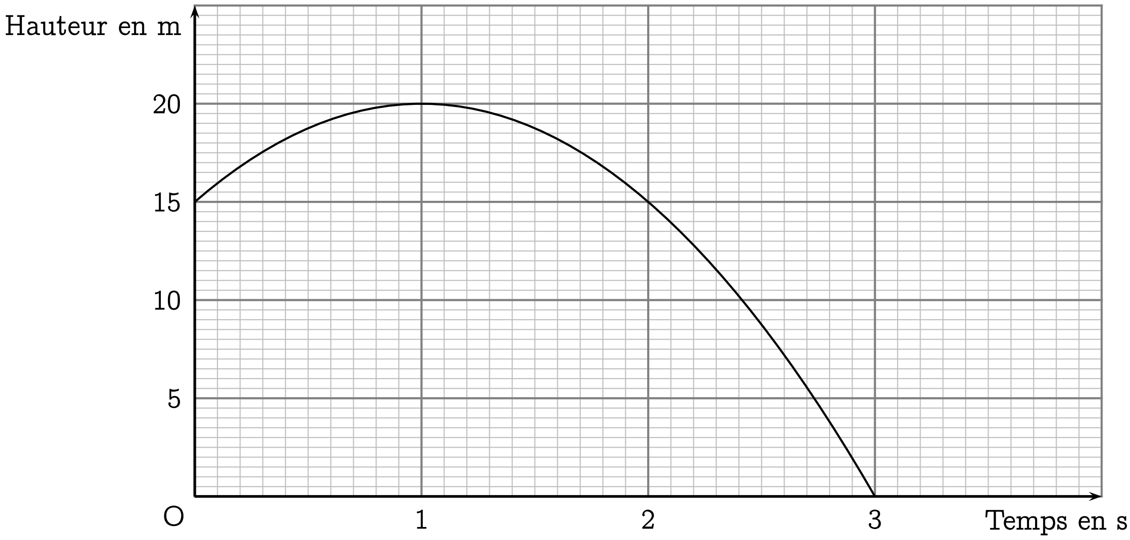
Un professeur syldave s'entraîne pour le championnat national de lancer d'élève râleur(euse). Il s'est inscrit dans la catégorie « falaise » : il lance donc son élève vers le haut, depuis le sommet d'une falaise au bord d'un lac tranquille. La hauteur en mètres de l'élève par rapport à la surface de l'eau est une fonction f du temps en seconde, représentée par la courbe (P).

Partie A : Étude graphique

Avec la précision permise par la lecture du graphique précédent, répondre aux questions suivantes.

1. À quelle hauteur se trouve l'élève au moment où le professeur le(a) lance ?
2. Pendant combien de temps, l'élève reste-t-il(elle) à une hauteur supérieure à la hauteur d'où il(elle) a été lancé(e) ?
3. Au bout de combien de temps l'élève touche-t-il(elle) la surface de l'eau avant de s'y enfoncer ?
4. Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'élève et au bout de combien de temps cette hauteur est-elle atteinte ?

5. Dresser le tableau de variation de la fonction f.



Partie B : Etude théorique (A - 5 points)

La fonction f est définie sur $[0;3]$ par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$, où x désigne le temps en secondes et $f(x)$ la hauteur de l'élève par rapport à la surface de l'eau en mètres.

1. Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire $20 - 5(x-1)^2$.
2. En justifiant précisément chaque étape de la démarche, démontrer que f est croissante sur $[0;1]$.
3. Factoriser $f(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\,;\,3]$.
   Que représente la solution dans l'expérience du lancer de l'élève ?
4. Résoudre l'inéquation $f(x) > 15$ (Penser à utiliser un tableau de signes).
   Que représentent les solutions dans l'expérience du lancer de l'élève ?
5. Quel est le prénom de l'élève ?

Exercice 6

On considère la fonction définie par

$$h : \begin{array}{ccc} [-5\,;\,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2 - 2x + 4 \end{array}$$

1. Montrez que pour tout réel x, $h(x) = -(x+1)^2 + 5$.
2. Étudiez les variations de h sur $]-5\,;\,-1]$ et sur $[-1\,;\,3[$.
3. Dressez le tableau de variations de h sur $[-5\,;\,3]$
4. Complétez le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-4	-3	-2	$-1,75$	$-1,5$	$-1,25$	-1	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	0	1	2	3
$h(x)$															

5. Tracez $(\mathcal{C}_h)$, la courbe représentative de h, dans un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées) sur la feuille millimétrée jointe.
6. Factorisez $h(x)$.

7. Résolvez les équations et inéquations suivantes par le calcul. Vous utiliserez l'expression de $h(x)$ la plus adaptée à chaque cas.

a) $h(x) = 0$

b) $h(x) \leqslant 1$

c) $h(x) \geqslant -2x$

8. Vérifiez graphiquement vos résultats en complétant votre graphique.