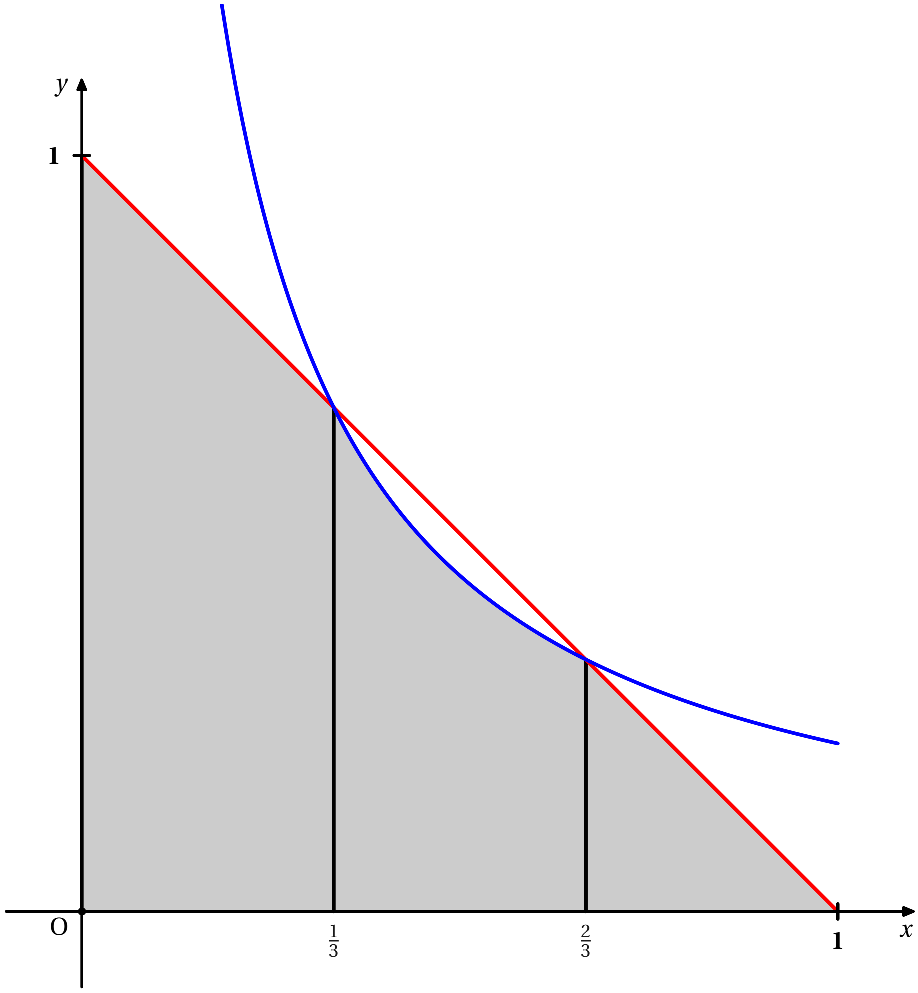
CORRIGÉ DU DS DU 19 MARS

Exercice 1

1. et 2. Cela donne ça :



1. Il s'agit de résoudre sur $[0\,;\,1]$ le système :

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} y = \frac{2}{9x} \\ y = -x+1 \end{cases}$$

On obtient :

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} -9x^2+9x=2 \\ y = -x+1 \end{cases}$$

Résolvons la première équation :
$\Delta = 81-72 = 9 = 3^2$ d'où $x_1 = \frac{-9-3}{-18} = \frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{-9+3}{-18} = \frac{1}{3}$
On en déduit les ordonnées correspondantes : $y_1 = -x_1+1 = \frac{1}{3}$ et $y_2 = -x_2+1 = \frac{2}{3}$.

$\boxed{\text{Les points cherchés ont pour coordonnées } \left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right) \text{ et } \left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)}$

2. L'aire cherchée vaut donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^{1/3} -x+1\,\mathrm{d}x + \int_{1/3}^{2/3} \frac{2}{9x}\,\mathrm{d}x + \int_{2/3}^{1} -x+1\,\mathrm{d}x \text{ le résultat étant exprimé en unités d'aire.}\\ &= \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{1/3} + \left[\frac{2}{9}\ln(x)\right]_{1/3}^{2/3} + \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_{2/3}^{1}\\ &= -\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln\left(\frac{2/3}{1/3}\right)-\frac{1}{2}+1+\frac{4}{18}-\frac{2}{3}\\ &= \frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln(2)\end{aligned}$$

Exercice 2

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.
On obtient $f'(x) = \mathrm{e}^{-x+2} - x\mathrm{e}^{-x+2} = (1-x)\mathrm{e}^{-x+2}$. Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$.
De plus, $f(x) = \mathrm{e}^2 \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^x/x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x/x = +\infty$, donc

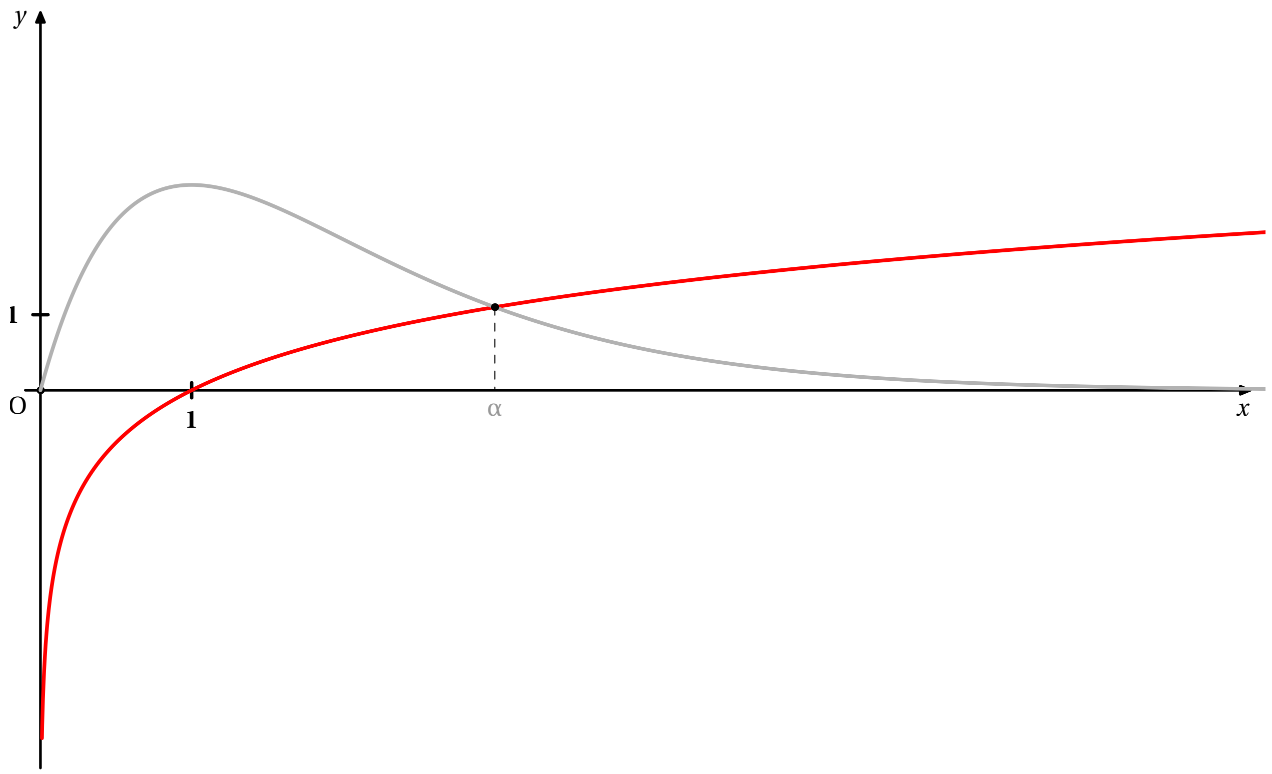
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Finalement, on obtient le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	e^1	$\searrow$	0

On en déduit que la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

2. a) Voici ce que l'on obtient :



On en déduit que l'équation semble avoir une unique solution sur $[1\,;+\infty[$ car les courbes se coupent en un point unique.

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*-+$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
Alors $g'(x) = \frac{1}{x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x+2} = \frac{1}{x} + (x-1)\mathrm{e}^{-x+2}$ est positif sur $[1\,;+\infty[$ comme somme de deux termes positifs sur cet intervalle.
On en déduit le tableau suivant :

x	1	α	$+\infty$
Variations de g	$-e$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Par lecture de ce tableau, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution sur $[1\,;+\infty[$.

c) À la calculatrice on obtient $\boxed{\alpha \approx 3.005}$.

Partie B

1. On obtient tout d'abord :

$$\begin{cases} u(x) = (x)^2 & u'(x) = 2\cdot x \\ v'(x) = e^{-(2\cdot x)} & v(x) = -\left(\frac{1}{2}\times e^{-(2\cdot x)}\right) \end{cases}$$

$$\mathrm{I} = \int_0^3 (x)^2 \times e^{-(2\cdot x)}\,dx = \left[-\left(\frac{1}{2}\times(x)^2\cdot e^{-(2\cdot x)}\right)\right]_0^3 - \int_0^3 2\cdot x \times -\left(\frac{1}{2}\times e^{-(2\cdot x)}\right)dx$$

puis :

$$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-(2\cdot x)} & v(x) = -\left(\frac{1}{2}\times e^{-(2\cdot x)}\right) \end{cases}$$

$$\mathrm{I} = \int_0^3 x \times e^{-(2\cdot x)}\,dx = \left[-\left(\frac{1}{2}\times x\cdot e^{-(2\cdot x)}\right)\right]_0^3 - \int_0^3 1 \times -\left(\frac{1}{2}\times e^{-(2\cdot x)}\right)dx$$

Finalement, $\boxed{\mathrm{I} = \dfrac{1-25\mathrm{e}^{-6}}{4}}$.

2. a) $\mathcal{V} = \displaystyle\int_0^3 \pi x^2 \mathrm{e}^{-2x+4}\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^4\mathrm{I}$

b) On obtient $\mathcal{V} \approx 40,224$ unités de volume. Or le repère est orthonormé d'unité 4 cm, donc 1 u.v.= $4\times4\times4 = 64\text{cm}^3$.
Finalement $\boxed{\mathcal{V} \approx 2574\text{cm}^3}$

Exercice 3

1. a) Comme $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $n \leqslant x+n \leqslant \pi+n$ sur $[0\,;\pi]$, on obtient :

$$\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin(x)}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}$$

On intègre :

$$\frac{-1}{n}\times(\pi-0) \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}\times(\pi-0)$$

et hop, unp'tit coup de gendarmes pour dire que la limite est nulle.

b) Ici, $1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2$ sur $[0\,;1]$ donc

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(n+1)}$$

2. Si $p = 0$, $\mathrm{I}(t) = \frac{t^2}{2}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{I}(t) = +\infty$. Sinon, on effectue une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-(p\cdot x)} & v(x) = \frac{\left(-\left(e^{-(p\cdot x)}\right)\right)}{p} \end{cases}$$

$$\mathrm{I} = \int_0^t x \times e^{-(p\cdot x)}\,dx = \left[\frac{\left(-\left(x\cdot e^{-(p\cdot x)}\right)\right)}{p}\right]_0^t - \int_0^t 1 \times \frac{\left(-\left(e^{-(p\cdot x)}\right)\right)}{p}\,dx = \frac{\left(-\left(p\cdot t\cdot e^{-(p\cdot t)}\right) - \left(e^{-(p\cdot t)}\right) + 1\right)}{(p)^2}$$

D'où $\mathrm{I}(t) = \dfrac{-pt\mathrm{e}^{-pt} - \mathrm{e}^{-pt}}{p^2} + \frac{1}{p^2}$.

On distingue deux cas :

si *p* est positif alors $\lim\limits_{\mathrm{X} \to -\infty} \mathrm{Xe}^{\mathrm{X}} = \lim\limits_{\mathrm{X} \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et donc par composition

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{I}(t) = \frac{1}{p^2}$$

si *p* est négatif alors $\lim\limits_{\mathrm{X} \to +\infty} \mathrm{Xe}^{\mathrm{X}} = \lim\limits_{\mathrm{X} \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ et donc par composition

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{I}(t) = +\infty$$