2nde13 Devoir surveillé de mathématiques n°1

Jeudi 5 octobre 2006 - Durée : 2 heures

L'usage des calculatrices comme celui de la copie du (de la) voisin(e) sont vivement déconseillés

Exercice 1 Un peu d'ordre

Nous considèrerons connus les résultats suivants :

> **Définition** *Soient a et b deux nombres réels quelconques.*
> *Nous dirons que a est **supérieur à** b lorsque la différence $a-b$ est positive. On notera alors*
>
> $$a \geqslant b$$
>
> **Théorème 1** *Soit a et b deux réels vérifiant $a \geqslant b$. Soit c un réel quelconque. Alors on a toujours*
>
> $$a+c \geqslant b+c$$
>
> **Théorème 2** *On peut multiplier par un même nombre réel …… les deux membres d'une inégalité sans en changer le sens.*
>
> **Théorème 3** *Si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre ……, alors l'inégalité change de sens.*

a. Complétez les …… des théorèmes 2 et 3 pour qu'ils soient corrects.

b. Reformulez le théorème 1 sous forme d'une phrase en langage courant, sur le modèle des énoncés des théorèmes 2 et 3.

c. Résolvez les inéquations suivantes.

i) $-3x+5 \geqslant -37$

ii) $\frac{1}{2}x-3 \leqslant 5x$

Vous **justifierez** chaque calcul en citant la définition ou le théorème que vous utilisez. Vous donnerez l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

d. On voudrait savoir si on peut additionner membre à membre deux inégalités de même sens ?

Vous commencerez par donner des exemples qui illustrent cette proposition.

Vous tenterez ensuite de la démontrer dans le cas général.

Exercice 2

On donne :

$t = (\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7})$ $\quad u = \frac{1}{2}+\frac{7}{5}\times\frac{3}{4}$ $\quad v = \dfrac{\frac{2}{3}+1}{2-\frac{1}{6}}$

a. Calculer t, u et v et donner les résultats sous la forme la plus simple possible.

b. Compléter le tableau ci-dessous à l'aide des symboles $\in$ (appartient) et $\notin$ (n'appa rtient pas) :

Ensembles	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
t					
u					
v					

Exercice 3

a. Le nombre $1,555$ est-il un nombre rationnel ? Justifier.

b. Existe-t-il des nombres décimaux qui ne soient pas rationnels ? Justifier.

c. Existe-t-il des nombres rationnels qui ne soient pas décimaux ? Justifier.

Exercice 4

a. Écrire sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers :

$$x = 5^2 \times 5^9 \times 10^{-2} \qquad y = \frac{(-2)^3 \times 24^2}{27^3 \times \left(2^3\right)^{-2}}$$

b. Écrire sous la forme $a\sqrt{b} + c$, avec $a,\ b,\ c$ des entiers et b étant le plus petit possible :

$$\mathrm{M} = \sqrt{288} - \sqrt{162} \qquad \mathrm{P} = (3\sqrt{5} - 2)^2$$

Exercice 5

Complétez avec l'un des symboles suivants : <, >, =. (Aucune justification n'est demandée)

$\frac{15}{11}$............$\frac{19}{11}$ $\qquad$ $\frac{-5}{24}$............$\frac{-7}{24}$

$\frac{15}{11}$............$\frac{15}{13}$ $\qquad$ $\frac{-15}{21}$............$\frac{-25}{35}$

$\frac{\pi}{3}$............$0,99$ $\qquad$ $\frac{3}{\sqrt{10}-1}$............$\frac{\sqrt{10}+1}{3}$

Exercice 6

Quel calcul effectue-t-on si on tape sur la calculatrice :

$$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{(}\ \boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{4}\ \boxed{)}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{6}$$

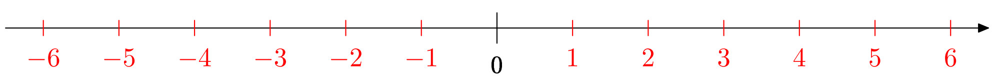
Donnez le résultat.

Exercice 7

a. On donne les intervalles $\mathrm{I} =]-3;3]$ et $\mathrm{J} =]-\infty;1]$

i) Compléter avec $\in$ ou $\notin$: $\qquad -\pi$............I $\qquad \sqrt{2}-1$............J

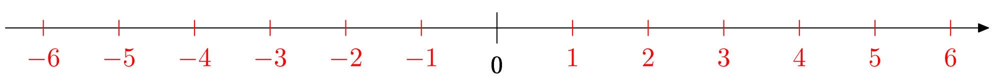
ii) Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur la droite graduée :



iii) Déterminer $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$

b. On donne les intervalles $\mathrm{I} =]-1;4[$ et $\mathrm{J} = [-3;+\infty[$

i) Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur la droite graduée :



ii) Déterminer $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$

QUESTION BONUS (FACULTATIVE)

De quelle fraction irréductible $0,123\overline{123}$ est-il le développement décimal ? Expliquez votre méthode.