SIXIÈME LEÇON

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## I - Préambule

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Elle fait intervenir la fonction-inconnue notée $y$, ses dérivées successives notées $y'$, $y''$, $\cdots$ et des fonctions connues.
Par exemple, considérons l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x^2$

1. Montrez que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
2. Montrez que $f$ est la seule fonction polynômiale du second degré solution de (E).
3. Montrez que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x-5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).
4. Montrez que la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (32x - 80)e^x + x^2 + 4x + 6$ est aussi solution de (E).

## II - Résolution de l'équation $y' = ay$

Il s'agit donc ici de déterminer *toutes* les fonctions $f$ dérivables sur I telles que, pour tout $x$ de I

$$f'(x) = af(x)$$

- Supposons qu'il existe une solution $y$ et posons $z(x) = e^{-ax}y(x)$. Calculez $z'(x)$. Qu'en déduisez-vous sur $z$ ? sur $y$ ?.
- La démonstration précédente suppose qu'il existe une solution au problème. Est-on sûr qu'une telle solution existe (dans le cas contraire, nous serions bien embêtés car notre démonstration ne vaudrait plus rien) ?
  Pouvez-vous trouver une solution particulière au problème ?

**Théorème 1 : solutions de $y' = ay$**
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec $a$ un réel donné) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{ax}$$

où $\lambda$ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

**Exercice 6- 1**

1. Résolvez par exemple l'équation $(E_1)$ : $3y' + 2y = 0$ et tracez plusieurs solutions sur l'écran de votre calculette.

**2.** Résolvez cette même équation sachant maintenant que $y(0) = 32$.
**3.** Donnez également une solution (non identiquement nulle...) pour chacune des équations différentielles suivantes :

$$(E_2)\ :\ y' = 32y \qquad (E_3)\ :\ y' = -32y \qquad (E_4)\ :\ y'' = -y \qquad (E_5)\ :\ y' = 32 \qquad (E_6)\ :\ y'' = 32$$

### Exercice 6- 2 Vrai ou faux ?

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $4f' - 3f = 0$ et $f(0) = 1$.
**1.** La courbe représentative de $f$ passe par le point A de coordonnées $(1, 3/4)$.
**2.** La courbe représentative de $f$ a, au point d'abscisse 0, une tangente de coefficient directeur 1.
**3.** La fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
**4.** La fonction $f$ est solution de l'équation différentielle $16y'' - 9y = 0$.

### Exercice 6- 3

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I vérifiant $f'(x) + |f(x)| = 0$ et $f(1) = 1$ en supposant que $1 \in \mathrm{I}$.
**1.** Montrez que $f$ est de signe constant sur au moins un intervalle J centré en 1.
**2.** Trouvez une fonction répondant au problème posé sur J.
**3.** Déduisez-en l'unique fonction répondant au problème posé si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

## III - Résolution de l'équation $y' = ay + b$

Lorsqu'un élève de T$^{\text{ale}}$S de masse $m$ est lâché en chute libre, sans vitesse initiale, d'un avion bimoteur de fabrication malgache piloté par une ancienne nageuse est-allemande, sa vitesse $t \mapsto v(t)$ est solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{k}{m}y = g$ où $k > 0$ est le coefficient de freinage et $g$ l'accélération de la pesanteur.
Déterminez tout d'abord le réel $c$ tel que $v$ vérifie pour tout $t \geqslant 0$ $v'(t) = -\dfrac{k}{m}(v(t) + c)$
On pose alors $f(t) = v(t) + c$. Montrez que $f$ vérifie une équation différentielle du type $y' = ay$. Déduisez-en $f$ puis $v$.
Interprétez physiquement le nombre $\mathrm{V} = \dfrac{mg}{k}$
*Plus généralement*, considérons l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$.
Montrez que la fonction $g\ : x \mapsto -b/a$ est solution de (E).
Alors on a bien $g'(x) = ag(x) + b$ pour tout $x$.
Or une fonction $f$ est solution de (E) si et seulement si $f'(x) = af(x) + b$. Déduisez-en que $f$ est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution d'une équation différentielle simple.
trouvez alors la forme générale des solutions de (E).

**Théorème 2 : résolution de $y' = ay + b$**
On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$, et l'équation sans second membre associée $y' = ay$. Alors
- la fonction $g\ : x \mapsto -b/a$ est une solution particulière de (E)
- l'ensemble des solutions de (E) s'obtient en ajoutant à $g$ une solution quelconque de l'équation sans second membre.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^{ax} - b/a$

## IV - Équations se ramenant à $y' = ay + b$

### Exercice 6- 4

$(E_1) : y' - 2y = 1 - 32x$. Montrez qu'il existe une fonction affine solution de cette équation. Déduisez-en les solutions de $(E_1)$.

### Exercice 6- 5

$(E_2) : y' = y(5-y)$. On cherche des solutions strictement positives solutions de cette équation différentielle. Montrez que la fonction $z = 1/y$ est solution d'une équation différentielle simple. Déduisez-en les solutions strictement positives de $(E_2)$.

### Exercice 6- 6

$(E_3)$ : $y'' + 4y' + 3y = 0$ est une équation différentielle du second ordre. On cherche les fonctions solutions de cette équation vérifiant les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = -5$.

1. On pose, pour tout réel $x$, $z(x) = e^x y(x)$.
   a) Calculez $z(0)$ et $z'(0)$.
   b) Montrez que $z$ admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde et que, pour tout réel $x$, $z''(x) = -2z'(x)$.
   c) En intégrant l'égalité précédente entre 0 et $t$, montrez que $z$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f' = 4-2f$.
   d) Exprimez alors $z(x)$ en fonction de $x$.
2. Montrez qu'il existe une et une seule fonction $y$ vérifiant les hypothèses de départ et exprimez $y(x)$ en fonction de $x$.

## V - Applications diverses

### Exercice 6- 7 Style Bac avec Roc

Dans une pièce à température constante de 20 ° C, à l'instant initial noté 0 la température $\theta(0)$ d'un liquide est égale à 70 ° C.
Cinq minutes plus tard, elle est de 60 ° C.
On admet que la température $\theta$ du liquide est une fonction dérivable du temps $t$, exprimé en minutes, et que $\theta'(t)$ est proportionnel à la différence entre la température $\theta(t)$ et celle de la pièce. On notera $a$ le coefficient de proportionnalité, $a \in \mathbb{R}$.

1. **Démonstration de cours.**
   Soit (E) l'équation différentielle $z' = az$.
   **Prérequis :** la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation (E).
   **Démontrer** que toute solution de (E) est de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = ay - 20a$.
3. Quelle sera la température du liquide 30 minutes après l'instant initial ?

### Exercice 6- 8 Encore un Roc

Soit $E_1$ l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = y$.
Soit $E_2$ l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' = y$.
*Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe une unique fonction $f$ qui appartient à $E_2$, et qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.*

1. Vérifier que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ sont des éléments de $E_2$.
2. Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $u = f + f'$.
   a) Démontrer que $f$ appartient à $E_2$ si et seulement si $u$ appartient à $E_1$.
   b) **Démonstration de cours.**
   **Prérequis :** la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est solution de $E_1$.
   **Démontrer** l'unicité de la fonction $u$ élément de $E_1$ qui vérifie $u(0) = 1$.
3. Soit $f$ un élément de $E_2$. Ou pose, pour tout réel $x$, $g(x) = f(x)\mathrm{e}^x$.

a) Démontrer que si $f$ vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, alors $g'(x) = e^{2x}$.

b) Démontrer qu'il existe une seule fonction $f$ répondant au problème posé et déterminer son expression.

## Exercice 6- 9 Circuit RL

Un circuit comprend en série un générateur de force électromotrice E, une bobine d'inductance L et une résistance R. L'intensité du courant électrique $i$, exprimée en ampères, est fonction du temps $t$, exprimé en secondes et est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{D}) \ : \ \mathrm{L}\,i'(t) + \mathrm{R}\,i(t) = \mathrm{E}$$

L est exprimée en henrys, R en ohms et E en volts. On donne $\mathrm{L} = 0,2\mathrm{H}$, $\mathrm{R} = 100\Omega$, $\mathrm{E} = 10\mathrm{V}$.

Écrivez et résolvez l'équation différentielle (E) en sachant qu'à l'instant $t = 0$ l'intensité du courant est nulle. Quelle est la limite de $i(t)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$ ?

## Exercice 6- 10 SSSSSSSSSSSShhhhhhhhhhhh........BOUM

Les élèves de TS 6 préparent l'invasion du Château de Rezé. Un commando parachutiste est formé et dirigée par une élève de la classe. Afin d'optimiser le saut, ils ont modélisé le saut de la manière suivante : un élève de masse $m$ est lâché (comme d'habitude) en chute libre, sans vitesse initiale ( on négligera la vitesse due au coup de pied de lancement) d'un avion bimoteur de fabrication malgache piloté par une ancienne nageuse est-allemande. Il est soumis à la force de la pesanteur $m\overrightarrow{g}$ et à une force de frottement proportionnelle à la vitesse. On note $z(t)$ l'altitude du parachutiste en fonction du temps.

On utilisera les valeurs numériques suivantes : $g = 10\ \mathrm{ms}^{-2}$, $m = 80$ kg et $k = 14\ \mathrm{kgs}^{-1}$.

**1.** En appliquant la Relation Fondamentale de la Dynamique [a], déterminez l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$

**2.** Déterminez la vitesse limite théorique du parachutiste. Sachant que le parachutiste quitte l'avion à vitesse nulle, déterminez le temps mis pour atteindre 90% de cette vitesse limite ainsi que la distance parcourue pendant ce temps. Même question avec 99% de la vitesse limite.

**3.** Lorsque le parachutiste ouvre son parachute, le coefficient de frottement est multiplié par 20. Il doit arriver au sol avec une vitesse inférieure à 6 $\mathrm{ms}^{-1}$. En supposant qu'il chute à la vitesse limite au moment de l'ouverture du parachute, déterminez l'altitude maximale d'ouverture du parachute (on considèrera que le parachute met 2 secondes à se déployer et que pendant ce laps de temps, le parachutiste conserve la vitesse limite).

## Exercice 6- 11 Errare Uranium est

On rappelle la loi de désintégration des noyaux radioactifs

$$\mathrm{N}'(t) = -\lambda \mathrm{N}(t)$$

où $\mathrm{N}(t)$ est le nombre de noyaux à l'instant $t$. On note $\tau = 1/\lambda$ le temps caractéristique.

**1.** Exprimez en fonction de $\tau$ la demi-vie $t_{0,5}$, temps au bout duquel $\mathrm{N}(t)$ a diminué de moitié.

**2.** Pour remédier aux problème du recyclage des déchets nucléaires, certains pays ont eu la lumineuse idée de fabriquer des obus à l'uranium appauvri et de les faire exploser sur des populations éloignées : on se débarrasse ainsi d'uranium peu rentable, on fait exploser les chars ennemis, sous l'effet de la chaleur de l'explosion l'uranium et ses dérivés se transforment en micro-poussières insolubles facilement assimilables par les poumons ennemis et amis. Il faut environ 4,5 milliards d'années pour que la moitié de l'uranium 238 (principal composant de l'UA) disparaisse. Quelle est la constante radioactive de $^{238}\mathrm{U}$ ?

**3.** Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À leur mort, il se désintègre avec une demi-vie de 5730 ans. Un archéologue martien découvre un fragment de pompier ukrainien contenant 71% de sa quantité initiale de $\mathrm{C}_{14}$. En quelle année l'archéologue a-t-il fait sa découverte ? (On rappelle que la centrale de Tchernobyl a explosé en avril 1986).

## Exercice 6- 12 Modèle de Verhulst

Notre ami belge a modélisé vers 1840 la croissance d'une population dans un milieu clos (bactéries, lapins sur une île déserte, profs dans l'Éducation Nationale etc.). La croissance est bien exponentielle au départ comme l'avait suggéré

a. $m\overrightarrow{v} = \Sigma\overrightarrow{\mathrm{Forces}}$

Malthus, mais une trop forte concentration crée certains problèmes : rareté de la nourriture, promiscuité, consanguinité, alcoolisme, perte des valeurs occidentales etc.
On suppose qu'une population ne peut dépasser une valeur maximum et on note $f(t)$ la fraction de ce maximum à l'instant $t$. On peut alors montrer que $f$ est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)}\ \ y' = \lambda y(1-y)$$

1. Résolvez (E) en introduisant $z = 1/y$.
2. Sachant que $\lambda = 0,1$ et que $f(0) = 0,01$, exprimez $f(t)$ en fonction de $t$ et représentez graphiquement la fonction $f$. Vous obtiendrez une « courbe logistique », que l'on retrouve dans la description de nombreux phénomènes plus où moins naturels.

Un peu de culture : l'étude des suites logistiques du type $u_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n)$ (voir aussi l'autre exercice les concernant page **??**) montre que si $\lambda \leqslant 1$, la population s'éteint, si $1 < \lambda \leqslant 3$, la population se stabilise autour de $1-1/\lambda$, entre 3 et une valeur proche de 3,57 on observe une périodicité des valeurs de la population avec un doublement de la période pour des valeurs de $\lambda$ de plus en plus rapprochées ; au delà de cette valeur limite, l'évolution de la population devient totalement imprévisible, car un changement infime de la valeur de $\lambda$ modifie complètement les valeurs de la suite. Tout ceci a été mis en évidence à partir de 1972. On pourrait en dire beaucoup plus, mais...

### Exercice 6- 13 Modèle de Gomperz

Pour décrire l'évolution d'une population en extinction (élèves choisissant la spécialité mathématique, élèves offrant des chocolats à leur GP, etc.), l'illustre Gomperz a proposé en 1925 le modèle suivant.

Si $g(t)$ est le nombre d'individus en vie à l'instant $t$, alors $g$ vérifie l'équation différentielle (G) :

$$y'(t) = -k\,y(t)\Big(h - \ln(y(t)\Big)$$

où $k$ et $h$ sont des constantes positives liées à la population étudiée. Le nombre $t$ représente le temps et sera positif ou nul dans tout ce qui suit. Enfin $g'$ représente la vitesse de « croissance » (... !) de la population à l'instant $t$.

On pose $z = \ln(y)$. Montrez que $z$ est solution d'une équation différentielle $(E_2)$ linéaire à coefficients constants puis résolvez cette équation. Déduisez-en $y(t)$.

### Exercice 6- 14 Vitesse angulaire d'un moteur à aimant permanent

Qui est qui ?
- $t \mapsto u(t)$ représente la tension d'alimentation du moteur
- $t \mapsto i(t)$ représente l'intensité du courant qui traverse le moteur
- $t \mapsto \gamma(t)$ représente la vitesse angulaire du moteur
- Ces trois fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$, de plus $\gamma$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$
- La résistance $\mathrm{R} = 2\Omega$
- La charge entraînée par le moteur présente un moment d'inertie $\mathrm{J} = 10^{-3}\,kg.m^2$
- Les frottements et les pertes magnétiques se traduisent par un couple proportionnel à la vitesse angulaire. Le coefficient de proportionnalité est $f = 4\cdot 10^{-5} n.m.rad^{-1}.s$
- La constante de couple est $k = 4\cdot 10^{-2}\mathrm{V}.rad^{-1}.s$

L'application des lois sur les moteurs montre que sur $\mathbb{R}^+$, on a les relations

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & k\gamma(t) + \mathrm{R}i(t) \\ ki(t) & = & \mathrm{J}\gamma'(t) + f\gamma(t) \\ \gamma(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Montrez que la vitesse angulaire vérifie le système

$$\begin{cases} \gamma'(t) + \left(\dfrac{\mathrm{R}f + k^2}{\mathrm{JR}}\right)\gamma(t) = \dfrac{k}{\mathrm{JR}}u(t) \\ \gamma(0) = 0 \end{cases}$$

   Déduisez-en un nouveau système (S) vérifié par $\gamma$ en utilisant les données numériques.

**2.** On alimente à présent le moteur avec une tension constante $u(t) = 5$ pour $t \in [0, +\infty[$. Résolvez alors le système (S).

**3.** On appelle temps de réponse à 5% le nombre $t_{r_1}$ défini par

$$\gamma(t_{r_1}) = \frac{95}{100} \lim_{t \to +\infty} \gamma(t)$$

Déterminez une valeur numérique de $t_{r_1}$ à $10^{-2}$ près.

### Exercice 6- 15

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

**1.** On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. Pour tout point M d'abscisse $t$ appartenant à $\mathcal{C}$, on considère le point P de coordonnées $(t,\ 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
Montrer que la distance PN est constante.


**2.** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive, dérivable et dont la dérivée est strictement positive. Pour tout point M d'abscisse $t$ appartenant à la courbe représentative de $f$, on considère le point P de coordonnées $(t,\ 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M la courbe représentative de $f$ avec l'axe des abscisses.

a) Calculer la distance PN en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.

b) Déterminer une équation différentielle $(E_k)$ vérifiée par les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$, strictement positives, dérivables, et dont la dérivée est strictement positive, pour lesquelles la distance PN est une constante $k$.

c) Déterminer les fonctions $f$ solutions de $(E_k)$.

### Exercice 6- 16 Bac

Voici un exo du Bac 2005 : très mal posé, presque anti-scientifique, mais il vaut mieux s'y préparer...
**Partie A**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}.$$

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

c . Étudier les variations de la fonction $f$.

**Partie B**

**1.** On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps $t$, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction $g$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle $t$ désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour $g$ une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E_1) y' = \frac{y}{4}.$$

a) Résoudre l'équation différentielle $(E_1)$.

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

**2.** En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps $t$ (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction $u$, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2)\begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

où $u'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $u$.

a) On suppose que, pour tout réel positif $t$, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction $h$ définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction $u$ satisfait aux conditions $(\mathrm{E}_2)$ si et seulement si la fonction $h$ satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_3)\begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1. \end{cases}$$

où $h'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $h$.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction $h$, puis celle de la fonction $u$.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque $t$ tend vers $+\infty$ ?

### Exercice 6- 17 Bac

Dans un plan muni d'un repère orthononnal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction $f$ définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $f$ et $f'$ ne s'annulant pas sur l'intervalle I.
On note M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x$ et d'ordonnée $y = f(x)$.
On désigne par $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M.
On rappelle qu'une équation de $\mathcal{T}$ est de la forme : $\mathrm{Y} = f'(x)[\mathrm{X} - x] + f(x)$.

**I. Question préliminaire**

**1.** Montrer que $\mathcal{T}$ coupe l'axe des abscisses en un point H dont l'abscisse $\mathrm{X_T}$ vérifie :

$$\mathrm{X_T} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

**2.** Montrer que $\mathcal{T}$ coupe l'axe des ordonnées en un point K dont l'ordonnée $\mathrm{Y_T}$ vérifie :

$$\mathrm{Y_T} = f(x) - xf'(x).$$

**II.** $k$ désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions $f$ pour lesquelles la différence $x - \mathrm{X_T}$ est constante, et égale à $k$, pour tout nombre réel $x$. (Propriété 1)

**1.** Démontrer que $f$ vérifie la propriété 1 si et seulement si $f$ vérifie l'équation différentielle :

$$y' = \frac{1}{k}y$$

**2.** En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 1 et déterminer pour $k = \dfrac{1}{2}$ la fonction $f$ de cette famille qui vérifie de plus la condition : $f(0) = 1$.

**III.** $k$ désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions $f$ pour lesquelles la différence $y - \mathrm{Y_T}$ est constante et égale à $k$, pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $\mathrm{I} = ]0\,;\,+\infty[$. (Propriété 2)

**1.** Démontrer que $f$ vérifie la condition posée si et seulement si $f$ vérifie l'équation différentielle :

$$y' = \frac{k}{x}.$$

**2.** En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 2 et déterminer pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction $f$ de cette famille qui vérifie la condition : $f(1) = 0$.

## Exercice 6- 18

Dans tout l'exercice, $\lambda$ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$.

**1.** On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle $(E_\lambda) : y' = y^2 + \lambda y$ et la condition $y(0) = 1$.
On suppose qu'il existe une solution $y_0$ de $(E_\lambda)$ strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ : $z = \frac{1}{y_0}$
Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction $z$.

**2. Question de cours**
Pré-requis
Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.
a) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution $z$ de l'équation différentielle $(E'_\lambda) : z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.
b) Donner l'expression de cette fonction que l'on notera $z_0$.

*On veut maintenant montrer que la fonction $z_0$ ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.*

**3.** a) Démontrer que $\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1}$.
*On pourra étudier sur $]0\,;\,1]$ la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$.*
b) En déduire que $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \frac{1}{2}$.

**4.** En déduire que la fonction $z_0$ ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.
Démontrer alors que $(E_\lambda)$ admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

## Exercice 6- 19 Bac

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On s'intéresse aux fonctions $f$ dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} (1) & : \quad \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à} [0\,;\,+\infty[,\ f'(x) = 4 - [f(x)]^2 \\ (2) & : \quad f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction $f$ vérifiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

**Partie A. Étude d'une suite**
Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction $f$ on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de points notés $(M_n)$, d'abscisse $x_n$ et d'ordonnée $y_n$ telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 \end{cases}$$

**1.** a) Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 0 | 0,2 | 0,4 | | | | | |
| $y_n$ | 0 | 0,8000 | 1,4720 | | | | | |

Compléter ce tableau. On donnera les résultats à $10^{-4}$ près.

b) Placer, sur le graphique donné en annexe, les points $\mathrm{M}_n$ pour $n$ entier naturel inférieur ou égal à 7.

c) D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite $(y_n)$ et sur sa convergence ?

**2.** a) Pour $x$ réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0\ ;\ 2]$ alors $p(x) \in [0\ ;\ 2]$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.

c) Étudier le sens de variation de la suite $(y_n)$.

d) La suite $(y_n)$ est-elle convergente ?

**Partie B. Étude d'une fonction**

Soit $g$ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{4x}-1}{\mathrm{e}^{4x}+1}\right)$ et $\left(\mathcal{C}_g\right)$ sa courbe représentative.

**1.** Montrer que la fonction $g$ vérifie les conditions (1) et (2).

**2.** a) Montrer que $\left(\mathcal{C}_g\right)$ admet une asymptote $\Delta$ dont on donnera une équation.

b) Étudier les variations de $g$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

**3.** Déterminer l'abscisse $\alpha$ du point d'intersection de $\Delta$ et de la tangente à $\left(\mathcal{C}_g\right)$ à l'origine.

**4.** Tracer, dans un repère orthonormal d'unité 5 cm la courbe $\left(\mathcal{C}_g\right)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

**Exercice 6- 20 Bac**

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} f(-x)f'(x) & = \quad 1 \ \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = \quad -4 \end{cases}$$

(où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$) et de trouver cette fonction.

**1.** On suppose qu'il existe une fonction $f$ satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

a) Démontrer que la fonction $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la fonction dérivée de la fonction $g$.

c) En déduire que la fonction $g$ est constante et déterminer sa valeur.

d) On considère l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$. Montrer que la fonction $f$ est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

**2. Question de cours**

a) On sait que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque

b) Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur $-4$ en 0.

**3.** Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

### Exercice 6- 21 Bac

On désigne par $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par $f'$ sa fonction dérivée.
Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :
(1) pour tout nombre réel $x$, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**1.** a) Démontrer que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) \neq 0$.
b) Calculer $f(0)$.

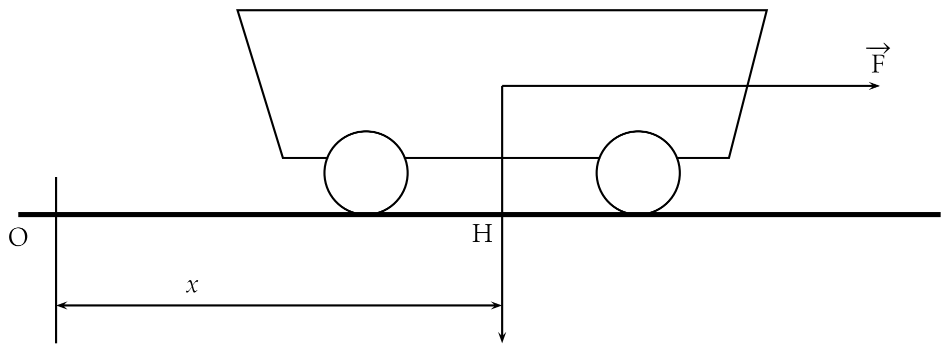
**2.** En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
(4) pour tout nombre réel $x$, $f''(x) = f(x)$, où $f''$ désigne la fonction dérivée seconde de la fonction $f$.

**3.** On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
c) En déduire les fonctions $u$ et $v$.
d) En déduire que, pour tout réel $x$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

**4.** a) Étudier les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**5.** a) Soit $m$ un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.
b) Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à $10^{-2}$ près).

### Exercice 6- 22 Bac




Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\overrightarrow{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles ? la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m$^{-1}$.s.
La position du chariot est repérée par la distance $x$, en mètres, du point H ? l'origine O du repère en fonction du temps $t$, exprimé en secondes. On prendra $t$ dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$\text{(E)} \qquad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

$x'$ est la dérivée de $x$ par rapport au temps $t$,
$x''$ est la dérivée seconde de $x$ par rapport au temps $t$.

**1.** On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps $t$ ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
Prouver que $x$ est solution de (E) si et seulement si $x'$ est solution de l'équation différentielle (F) $\quad v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.
Résoudre l'équation différentielle (F).

**2.** On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

a) Calculer, pour tout nombre réel $t$ positif, $x'(t)$.

b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel $t$ positif, $x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{-t/8}$.

**3.** Calculer $\mathrm{V} = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$ . Pour quelles valeurs de $t$ la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale ? 90 % de sa valeur limite V ?

**4.** Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

### Exercice 6- 23 Bac

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f$ définies et dérivables sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \qquad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2.$$

**1.** a) Démontrer que si $f$ est solution de (E) alors la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle (E′) : $\quad y' = 2y + 8$.

b) Démontrer que si $h$ est solution de (E′) alors la fonction $f$ définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

**2.** Résoudre (E′) et en déduire toutes les solutions de (E),

**3.** Existe-t-il une fonction $f$ solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $\mathrm{A}(\ln 2\ ;\ 0)$ ? Si oui la préciser.

### Exercice 6- 24 Bac

**1.** Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' + y = 0 \quad (\mathrm{E}),$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

**2.** On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (\mathrm{E}')$$

a) Déterminer deux réels $m$ et $p$ tels que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de (E}').$$

b) Soit $g$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $g$ est solution de l'équation (E′) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E′).

**3.** Étudier les variations de la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.

**4.** Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $h$.

**5.** Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $h$ et $\Gamma$ celle de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

a) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\Gamma$.

b) Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

### Exercice 6- 25

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

**Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours**

Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour $t$ appartenant à $[0 ; 30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après $t$ jours.
On a donc $y(0) = 0,01$.
On admet que la fonction $y$ ainsi définie sur $[0 ; 30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0,05y(10 - y).$$

**1.** On considère la fonction $z$ définie sur l'intervalle $[0 ; 30]$ par $z = \frac{1}{y}$.

Démontrer que la fonction $y$ satisfait aux conditions

$\begin{cases} y(0) &= 0,01 \\ y' &= 0,05y(10-y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction $z$ satisfait aux conditions

$\begin{cases} z(0) &= 100 \\ z' &= -0,5z + 0,05 \end{cases}$

**2.** a) En déduire une expression de la fonction $z$ puis celle de la fonction $y$.

b) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

## Exercice 6- 26 Bac

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction $f$ du temps $t$.
$f$ est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10.$$

La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps $t$ en heures.

**1.** Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220° C.

**2.** On pourra admettre désormais que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20.$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal ; les unités graphiques sont 2 cm pour un heure en abscisse et 1 cm pour vingt degrés Celsius en ordonnée.

a) Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^+$.

b) Étudier la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c) Construire $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0 ; 7]$.

**3.** a) Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est 50° C. On laissera apparents les traits de construction.

b) Retrouver ce résultat par le calcul.