BTS domotique 1 -Équations différentielles

Premier ordre

Exercice 1 BTS

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y' - 2y = x\varepsilon^{x}$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' - 2y = 0.$$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-1)\varepsilon^{x}$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Exercice 2 BTS

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 710y = 710$ où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' + 710y = 0.$$
2. Soit h la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(t) = 1$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution φ de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = 0$.

Exercice 3 BTS

On considère l'équation différentielle
$$(E)\ :\qquad y' - y = -\frac{4e^{2x}}{(e^{x}+1)^2}$$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0)\ : y' - y = 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1}$. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 4 BTS

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = -t$ où l'inconnue y désigne une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$.
2. Déterminer les nombres réels a et b pour lesquels la fonction h définie pour tout réel t par $h(t) = at + b$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E), dont la représentation graphique dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $(0\,;\,2)$.

Exercice 5 BTS

On considère l'équation différentielle (E) :

$$10^4 y' + 2ty = 0,$$

où y est une fonction de la variable réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 6 BTS

Partie A
Soit (E) l'équation différentielle

$$y' + y = -2xe^{-x}$$

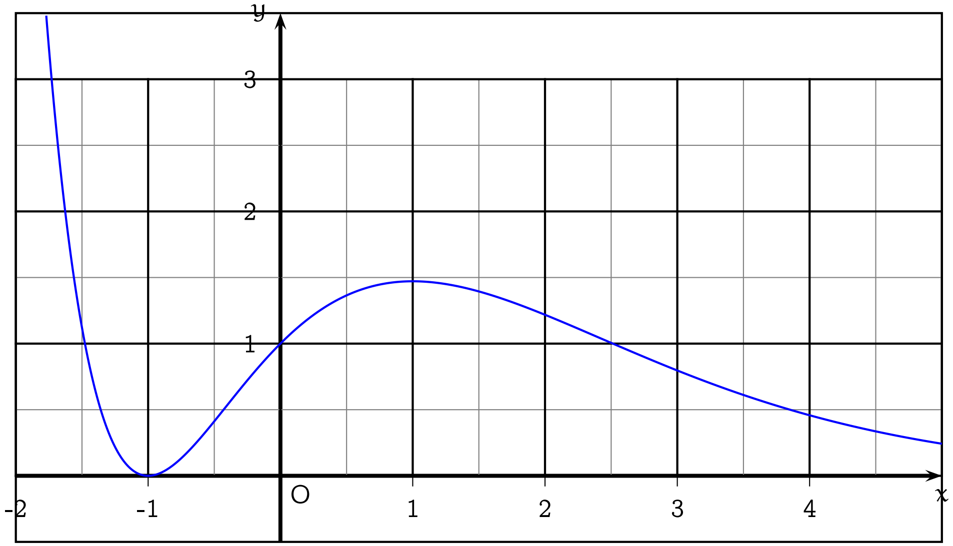
où y désigne une fonction de la variable réelle x définie dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E).
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Partie B
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{-x} - x^2e^{-x}.$$

1. Justifier que g est solution dc l'équation différentielle (E) de la partie A.
2. Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée par la courbe ci-dessous :



On admet que la fonction h est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

En utilisant le graphique précédent donner une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$. On expliquera la démarche utilisée.

3. On se propose de calculer la valeur exacte de l'intégrale précédente.
   a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 1 - 2e^{-1}.$$

   b) On sait que g est une solution particulière de l'équation différentielle (E) de la partie A, c'est-à-dire que, pour tout réel x on a :

$$g(x) = -g'(x) - 2xe^{-x}.$$

   En déduire que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = 4e^{-1} - 1$, puis la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de la portion du plan comprise entre la courbe représentative de g (tracée à la question 5 de la partie B), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 7 BTS

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' - y = e^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) \quad : \quad y' - y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

B. Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)e^x.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 2 cm,

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu au b..
2. a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x+2)e^x$.
   b) Établir le tableau de variations de f.
3. a) Écrire une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   b) Construire sur la feuille de copie quadrillée T et $\mathcal{C}$.

C. Calcul intégral

1. Justifier que la fonetion f défmie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = f'(x) - e^x$.
2. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un nombre réel strictement inférieur à -2. On note $I = \displaystyle\int_a^{-2} f(x)\,dx$.
   a) Démontrer que $I = -ae^a - 2e^{-2}$.
   b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -4$ et $x = -2$.
   c) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de cette aire.

Exercice 8 BTS

On considère l'équation différentielle (E) définie par :

$$y' - 2y = e^{2x} - 1$$

où y désigne une fonction ntunérique dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = xe^{2x} + \dfrac{1}{2}$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer la solution générale de l'équation (E_0) définie par : $y' - 2y = 0$.
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Vérifier que la solution particulière de (E) qui s'annule en 0 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} + \frac{1}{2}.$$
5. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$ et en déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 9 BTS

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 4x$, où y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Soit l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
   Résoudre l'équation différentielle (E').
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie pour tout x réel par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation (E).
   a) Résoudre l'équation différentielle (E).
   b) Déterminer la fonction f, solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) satisfaisant la condition : $f(0) = 0$.

Partie B

Soit la fonction f, définie pour tout x réel par $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre $2x$ en facteur dans l'expression de $f(x)$).
3. Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$.
3. On considère l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en cm^2, puis en donner l'approximation décimale arrondie an centième.

Exercice 10 BTS

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(1+x)\,y' + y = \frac{1}{1+x}$$

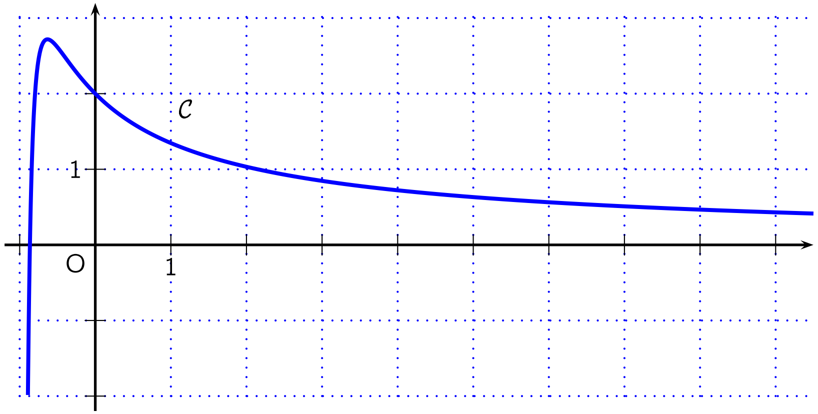
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que les solutions sur $]-1;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :
   $$(1+x)y' + y = 0$$
   sont les fonctions définies par $h(x) = \dfrac{k}{x+1}$ où k est une constante réelle quelconque.
2. Soit g la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.
   Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$, dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.



1. On admet que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. a) Démontrer que, pour tout x de $]-1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$
   b) Résoudre dans $]-1\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1 - \ln(1+x) \geqslant 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $]-1\ ;\ +\infty[$.
   c) Établir le tableau de variation de f.

Deuxième ordre

Exercice 11 BTS

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\quad y'' + 2y' + y = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 12 BTS

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y" - 3y' - 4y = -5\ e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0)\ :\quad y'' - 3y' - 4y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{-x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

Exercice 13 BTS

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\quad y'' - y' - 2y = (-6x - 4)\,e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E_0)\quad y'' - y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \left(x^2 + 2x\right)e^{-x}$$

   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 1$$

Exercice 14 BTS

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad 4y'' + 12y' + 9y = 36,$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $4y'' + 12y' + 9y = 0$.
2. Vérifier que la fonction h, définie pour tout réel x par $h(x) = 4$, est une solution particulière de (E). En déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la solutionfde (E) qui vérifie $f(0) = 5$ et $f'(0) = 0,5$.

Exercice 15 BTS

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + 2y' + y = x + 4$$

, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g, définie pour tout réel x par $g(x) = x + 2$ est une solution particulière de (E).
   En déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie les deux conditions $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.

Partie B - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -xe^{-x} + x + 2.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra si besoin écrire la fonction sous la forme $f(x) = -x\left(e^{-x} - 1\right) + 2$).
2. Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.
3. On admet que le tableau de variations de la fonction f' est le suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		↗	$e^{-2} + 1$	↘	
	$-\infty$				1

   Calculer $f'(0)$. En déduire le signe de $f'(x)$.
4. Établir le tableau de variations de f.

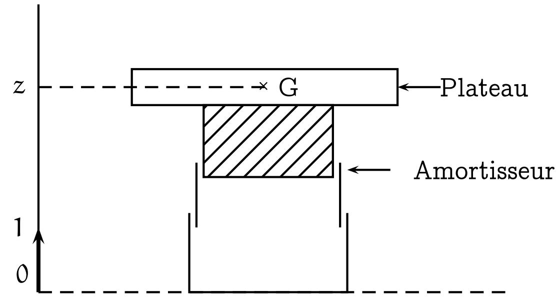
Partie C - Étude graphique

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   Déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à cette droite.
2. Construire $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ (unité graphique : 2 cm).
3. On note $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée sur le graphique précédent par $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
   Exprimer $\mathcal{A}$ à l'aide d'une intégrale.
   Déterminer par la méthode de l'intégration par parties la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis en donner une valeur décimale arrondie au mm^2.

Exercice 16 BTS

On considère un système mécanique formé d'un plateau soutenu par un amortisseur. Il est représenté sur le schéma ci-contre.
On note z la cote du centre de gravité du plateau. On suppose que z est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ où t représente le temps exprimé en seconde.



L'étude de ce système mécanique permet de considérer que la fonction z est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad 5z'' + 6z' + z = 2.$$

Partie A

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $5z'' + 6z' + z = 0$.
2. Chercher une solution particulière constante de l'équation (E) et en déduire la solution générale de (E).
3. Donner la solution g de (E) qui vérifie les conditions $g(0) = 5$ et $g'(0) = 1$.

Partie B

On suppose pour la suite du problème que $z(t) = f(t)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 0,5e^{-t} + 2,5e^{-0,2t} + 2.$$

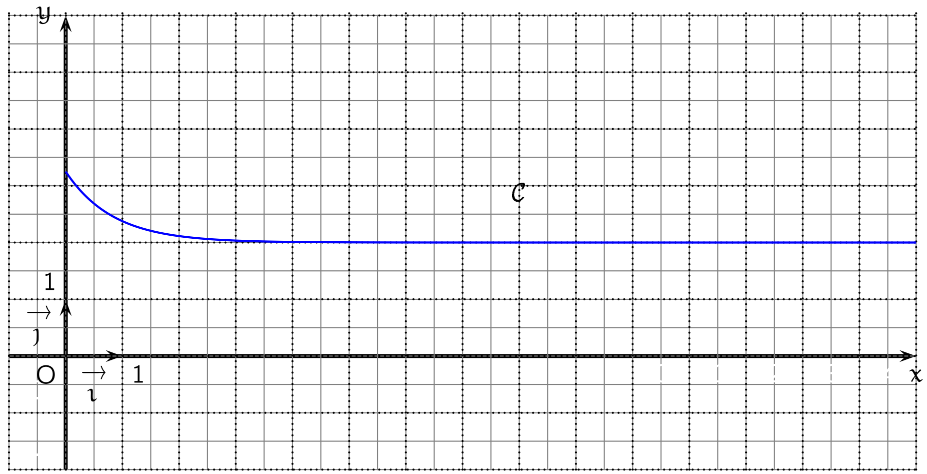
1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
3. Déduire des deux questions précédentes l'évolution de la cote du point G en fonction du temps t.
4. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Justifier l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ quand t tend vers $+\infty$; en donner une équation.
   Tracer cette asymptote sur le graphique de la feuille jointe en annexe.

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h, définie pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par
$$h(t) = e^{-t} + 2,5e^{-0,2t}.$$
2. a) Calculer $\displaystyle\int_1^5 [f(t) - 2]\ dt$.

   b) Interpréter géométriquement ce résultat sur la feuille jointe en annexe.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)



Exercice 17 BTS

y désigne une fonction de la variable z définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = -3x - 2.$$

Partie A

1. Résoudre sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation différentielle $y''-4y'+3y = 0$.
2. a) Soit a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = ax + b$.
   Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
3. Déterminer la fonction f, solution particulière sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels de l'équation (E), telle que : $f(0) = -1$ et $f''(0) = 9$.

Partie B

Soit la fonction f définie pour tout x réel par

$$f(x) = e^{3x} - x - 2.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. En remarquant que, pour x différent de 0, $f(x) = x\left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques :
   - 4 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses,
   - 1 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées.

   Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet pour asymptote la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x - 2$ au voisinage de $-\infty$.
5. Déterminer les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ selon les valeurs de x.
6. Tracer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

Partie C

Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, du domaine compris entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$, la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de $\mathcal{A}$.