Résoudre une équa diff avec la MÉTHODE D'EULER ! !

Informatique pour tou(te)s - Semaines 5 & 6

Guillaume CONNAN

Lycée Clemenceau - MP/MP*

Dernière mise à jour : 25 janvier 2015 à 23:15

Sommaire

Sommaire

Sommaire

On connaît les valeurs d'une fonction f en des points x_i et on cherche à en déduire une approximation polynomiale P de f sur $[a, b]$.

Interpolation

Extrapolation

Intégration

Équations différentielles

On connaît les valeurs d'une fonction f en des points x_i et on cherche à en déduire une approximation polynomiale P de f sur $[a, b]$.

Interpolation

Extrapolation

Intégration

Équations différentielles

On connaît les valeurs d'une fonction f en des points x_i et on cherche à en déduire une approximation polynomiale P de f sur $[a, b]$.

Interpolation

Extrapolation

Intégration

Équations différentielles

On connaît les valeurs d'une fonction f en des points x_i et on cherche à en déduire une approximation polynomiale P de f sur $[a, b]$.

Interpolation

Extrapolation

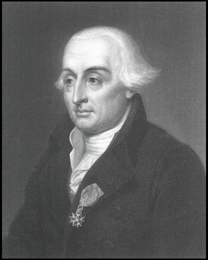
Intégration

Équations différentielles

On connaît les valeurs d'une fonction f en des points x_i et on cherche à en déduire une approximation polynomiale P de f sur $[a, b]$.
Interpolation
Extrapolation
Intégration
Équations différentielles

Sommaire

Edward Waring
(1736 - 1798)

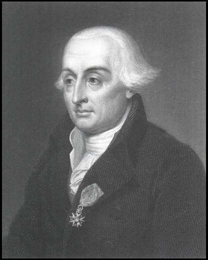


Giuseppe Lodovico de Lagrangia
(1736 - 1813)

1779 : *Problems Concerning Interpolations*

1795 : *Leçons Élémentaires sur les Mathématiques Données a l'École Normale*

Edward Waring
(1736 - 1798)

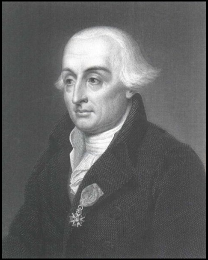


Giuseppe Lodovico de Lagrangia
(1736 - 1813)

1779 : *Problems Concerning Interpolations*

1795 : *Leçons Élémentaires sur les Mathématiques Données a l'École Normale*

Edward Waring
(1736 - 1798)

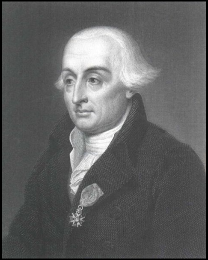


Giuseppe Lodovico de Lagrangia
(1736 - 1813)

1779 : *Problems Concerning Interpolations*

1795 : *Leçons Élémentaires sur les Mathématiques Données a l'École Normale*

Edward Waring
(1736 - 1798)



Giuseppe Lodovico de Lagrangia
(1736 - 1813)

1779 : *Problems Concerning Interpolations*

1795 : *Leçons Élémentaires sur les Mathématiques Données a l'École Normale*

On travaillera dans cette section avec des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, une fonction numérique réelle f définie sur un intervalle $[a, b]$ et une famille $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.

Théorème 1

Il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ et un seul tel que :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \qquad \widetilde{P_n}(x_i) = f(x_i)$$

Ce polynôme s'écrit :

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(X)$$

avec :

$$\mathcal{L}_i(X) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

$$Q(X) = \prod_{j=0}^{n} (X - x_j)$$

$$Q'(X) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (X - x_j)$$

$$Q'(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)$$

$$\mathcal{L}_i(X) = \frac{Q(X)}{Q'(x_i)(X - x_i)}$$

$$Q(X) = \prod_{j=0}^{n}(X - x_j)$$

$$Q'(X) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (X - x_j)$$

$$Q'(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)$$

$$\mathcal{L}_i(X) = \frac{Q(X)}{Q'(x_i)(X - x_i)}$$

$$Q(X) = \prod_{j=0}^{n}(X - x_j)$$

$$Q'(X) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (X - x_j)$$

$$Q'(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)$$

$$\mathcal{L}_i(X) = \frac{Q(X)}{Q'(x_i)(X - x_i)}$$

$$Q(X) = \prod_{j=0}^{n} (X - x_j)$$

$$Q'(X) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (X - x_j)$$

$$Q'(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)$$

$$\mathcal{L}_i(X) = \frac{Q(X)}{Q'(x_i)(X - x_i)}$$

Choix de la base :

- base canonique : matrice de Vandermonde
- base des polynômes de Lagrange : matrice diagonale
- base des différences divisées : 1, $X - x_0$, $(X - x_0)(X - x_1), \ldots, (X - x_0)(X - x_1) \cdots (X - x_{n-1})$

Choix de la base :

- base canonique : matrice de Vandermonde
- base des polynômes de Lagrange : matrice diagonale
- base des différences divisées : 1, $X - x_0$, $(X - x_0)(X - x_1)$,...,$(X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_{n-1})$

Choix de la base :

- base canonique : matrice de Vandermonde
- base des polynômes de Lagrange : matrice diagonale
- base des différences divisées : 1, $X - x_0$, $(X - x_0)(X - x_1), \ldots, (X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_{n-1})$

D'un point de vue algorithmique, que se passe-t-il lorsqu'on rajoute un point pour améliorer l'interpolation ?

Sommaire

$$f[x_0, x_2, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

$\boldsymbol{f[x_0]}$	$\boldsymbol{f[x_0, x_1]}$	$\boldsymbol{f[x_0, x_1, x_2]}$	$\boldsymbol{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}$
$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_0]$	
$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$		
$f[x_3]$			

Coefficients du polynôme interpolateur dans la base des différences divisées :

$$P_n(t) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k](t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_{k-1})$$

$$f[x_0, x_2, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

$\boldsymbol{f[x_0]}$	$\boldsymbol{f[x_0, x_1]}$	$\boldsymbol{f[x_0, x_1, x_2]}$	$\boldsymbol{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}$
$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_0]$	
$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$		
$f[x_3]$			

Coefficients du polynôme interpolateur dans la base des différences divisées :

$$P_n(t) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_{k-1})$$

$$f[x_0, x_2, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

$$\begin{array}{llll}
\boldsymbol{f[x_0]} & \boldsymbol{f[x_0, x_1]} & \boldsymbol{f[x_0, x_1, x_2]} & \boldsymbol{f[x_0, x_1, x_2, x_3]} \\
f[x_1] & f[x_1, x_2] & f[x_1, x_2, x_0] & \\
f[x_2] & f[x_2, x_3] & & \\
f[x_3] & & &
\end{array}$$

Coefficients du polynôme interpolateur dans la base des différences divisées :

$$P_n(t) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k](t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_{k-1})$$

D'un point de vue algorithmique, que se passe-t-il lorsqu'on rajoute un point pour améliorer l'interpolation ?

$$\begin{array}{llll}
\boldsymbol{f[x_0]} & \boldsymbol{f[x_0,x_1]} & \boldsymbol{f[x_0,x_1,x_2]} & \boldsymbol{f[x_0,x_1,x_2,x_3]} \\
f[x_1] & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_0] & \\
f[x_2] & f[x_2,x_3] & & \\
f[x_3] & & &
\end{array}$$

D'un point de vue algorithmique, que se passe-t-il lorsqu'on rajoute un point pour améliorer l'interpolation ?

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{f[x_0]} & \boldsymbol{f[x_0,x_1]} & \boldsymbol{f[x_0,x_1,x_2]} & \boldsymbol{f[x_0,x_1,x_2,x_3]} \\
f[x_1] & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_0] & \\
f[x_2] & f[x_2,x_3] & & \\
f[x_3] & & &
\end{array}
$$

D'un point de vue algorithmique, que se passe-t-il lorsqu'on rajoute un point pour améliorer l'interpolation ?

$$
\begin{array}{lllll}
\boldsymbol{f[x_0]} & \boldsymbol{f[x_0,x_1]} & \boldsymbol{f[x_0,x_1,x_2]} & \boldsymbol{f[x_0,x_1,x_2,x_3]} & \boldsymbol{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]} \\
f[x_1] & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_0] & f[x_1,x_2,x_3,x_4] & \\
f[x_2] & f[x_2,x_3] & f[x_2,x_3,x_4] & & \\
f[x_3] & f[x_3,x_4] & & & \\
f[x_4] & & & &
\end{array}
$$

Sommaire

Soit P_n un polynôme interpolateur en x_0, x_2,...,x_n points distincts de $[a,b]$ d'une fonction f définie sur $[a,b]$.

Soit $t \in [a,b]$ distinct des x_i (sinon...). Posons $e_n(t) = P_n(t) - f(t)$ et P_{n+1} le polynôme qui interpole f en x_0,...,x_n, t.

$$P_{n+1}(t) = f(t) = P_n(t) + f[x_0, x_2, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

$$e_n(t) = -f[x_0, x_2, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

Une n^e formule de Cauchy montre que si f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, il existe $\xi_t \in]a,b[$ tel que :

$$e_n(t) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \quad \text{soit} \quad |e_n(t)| \leqslant \max_{\xi \in]a,b[} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right|$$

Soit P_n un polynôme interpolateur en x_0, x_2,...,x_n points distincts de $[a, b]$ d'une fonction f définie sur $[a, b]$.
Soit $t \in [a, b]$ distinct des x_i (sinon...). Posons $e_n(t) = P_n(t) - f(t)$ et P_{n+1} le polynôme qui interpole f en x_0,...,x_n, t.

$$P_{n+1}(t) = f(t) = P_n(t) + f[x_0, x_2, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

$$e_n(t) = -f[x_0, x_2, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

Une n^e formule de Cauchy montre que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, il existe $\xi_t \in]a, b[$ tel que :

$$e_n(t) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \quad \text{soit} \quad |e_n(t)| \leqslant \max_{\xi \in]a,b[} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right|$$

Soit P_n un polynôme interpolateur en x_0, x_2,...,x_n points distincts de $[a,b]$ d'une fonction f définie sur $[a,b]$.
Soit $t \in [a,b]$ distinct des x_i (sinon...). Posons $e_n(t) = P_n(t) - f(t)$ et P_{n+1} le polynôme qui interpole f en x_0,...,x_n, t.

$$P_{n+1}(t) = f(t) = P_n(t) + f[x_0, x_2, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

$$e_n(t) = -f[x_0, x_2, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

Une n^{e} formule de Cauchy montre que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, il existe $\xi_t \in]a,b[$ tel que :

$$e_n(t) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \quad \text{soit} \quad |e_n(t)| \leqslant \max_{\xi \in]a,b[} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right|$$

Soit P_n un polynôme interpolateur en x_0, x_2,...,x_n points distincts de $[a, b]$ d'une fonction f définie sur $[a, b]$.
Soit $t \in [a, b]$ distinct des x_i (sinon...). Posons $e_n(t) = P_n(t) - f(t)$ et P_{n+1} le polynôme qui interpole f en x_0,...,x_n, t.

$$P_{n+1}(t) = f(t) = P_n(t) + f[x_0, x_2, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

$$e_n(t) = -f[x_0, x_2, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

Une n^{e} formule de Cauchy montre que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, il existe $\xi_t \in]a, b[$ tel que :

$$e_n(t) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \quad \text{soit} \quad |e_n(t)| \leqslant \max_{\xi \in]a,b[} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right|$$

Soit P_n un polynôme interpolateur en x_0, x_2,...,x_n points distincts de $[a,b]$ d'une fonction f définie sur $[a,b]$.
Soit $t \in [a,b]$ distinct des x_i (sinon...). Posons $e_n(t) = P_n(t) - f(t)$ et P_{n+1} le polynôme qui interpole f en x_0,...,x_n, t.

$$P_{n+1}(t) = f(t) = P_n(t) + f[x_0, x_2, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

$$e_n(t) = -f[x_0, x_2, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

Une n^{e} formule de Cauchy montre que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, il existe $\xi_t \in]a,b[$ tel que :

$$e_n(t) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \quad \text{soit} \quad |e_n(t)| \leqslant \max_{\xi \in]a,b[} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right|$$

Sommaire

$$|e_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left\| \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right\|_\infty \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$$

$$\left\| \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right\|_\infty$$

Ce n'est qu'un début...

$$|e_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left\| \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right\|_\infty \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$$

$$\left\| \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right\|_\infty$$

Ce n'est qu'un début...

$$|e_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left\| \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right\|_\infty \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$$

$$\left\| \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right\|_\infty$$

Ce n'est qu'un début...

Sommaire

Juste pour information...On appele n^{e} constante de Lebesgue le réel

$$\Lambda_n = \max_{t\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\mathcal{L}_i(t)|$$

Alors

Théorème 2

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

$$\|e_n\|_\infty \leqslant (1 + \Lambda_n) \min_{Q\in\mathbb{R}[X]} \|f - \widetilde{Q}\|_\infty$$

Sommaire

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f)$$

les w_i sont les *poids*, les x_i sont les pivots, $E_n(f)$ l'erreur commise.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f)$$

les w_i sont les *poids*, les x_i sont les pivots, $E_n(f)$ l'erreur commise.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f)$$

les w_i sont les *poids*, les x_i sont les pivots, $E_n(f)$ l'erreur commise.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f)$$

les w_i sont les *poids*, les x_i sont les pivots, $E_n(f)$ l'erreur commise.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b \mathcal{L}_i(t)\,\mathrm{d}t\right) f(x_i)\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b \mathcal{L}_i(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{w_i} f(x_i)$$

Dans la base des différences divisées :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \int_a^b f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f[x_0, \ldots, x_k](t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_{k-1})\,\mathrm{d}t$$

On notera :

- $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- $\mathcal{I}_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$
- $E_n(f) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)$

On notera :

- $\mathcal{I}(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- $\mathcal{I}_n(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$
- $E_n(f) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)$

On notera :

- $\mathcal{I}(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- $\mathcal{I}_n(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$
- $E_n(f) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)$

Définition 3

Une méthode de quadrature est **exacte** sur un ensemble A si pour toute fonction f de A :

$$E_n(f) = 0$$

Définition 4

Une méthode de quadrature est d'ordre m si elle est exacte pour tout x^k avec $k \in \{0...m\}$ mais n'est pas exacte pour x^{m+1}.

Définition 3

Une méthode de quadrature est **exacte** sur un ensemble A si pour toute fonction f de A :

$$E_n(f) = 0$$

Définition 4

Une méthode de quadrature est d'**ordre** m si elle est exacte pour tout x^k avec $k \in \{0 \dots m\}$ mais n'est pas exacte pour x^{m+1}.

Définition 3

Une méthode de quadrature est **exacte** sur un ensemble A si pour toute fonction f de A :

$$E_n(f) = 0$$

Définition 4

Une méthode de quadrature est d'**ordre** m si elle est exacte pour tout x^k avec $k \in \{0 \ldots m\}$ mais n'est pas exacte pour x^{m+1}.

Sommaire

$$x_0 = a \qquad OU \qquad x_0 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t \qquad OU \qquad f(b)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = 1$$

Si f est $\mathcal{C}^1$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$R_0(f) = \pm\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$$

Démonstration ?

$$x_0 = a \qquad OU \qquad x_0 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t \qquad OU \qquad f(b)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = 1$$

Théorème 5 (Formule des rectangles)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx (b-a)f(a) \qquad OU \qquad (b-a)f(b)$$

Si f est $\mathcal{C}^1$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$R_0(f) = \pm\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$$

Démonstration ?

$$x_0 = a \qquad OU \qquad x_0 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t \qquad OU \qquad f(b)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = 1$$

Théorème 5 (Formule des rectangles)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx (b-a)f(a) \qquad OU \qquad (b-a)f(b)$$

Si f est $\mathcal{C}^1$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$R_0(f) = \pm\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$$

Démonstration ?

$$x_0 = a \qquad OU \qquad x_0 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t \qquad OU \qquad f(b)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = 1$$

Théorème 5 (Formule des rectangles)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx (b-a)f(a) \qquad OU \qquad (b-a)f(b)$$

Si f est $\mathcal{C}^1$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$R_0(f) = \pm\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$$

Démonstration ?

$$x_0 = a \qquad OU \qquad x_0 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t \qquad OU \qquad f(b)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = 1$$

Théorème 5 (Formule des rectangles)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx (b-a)f(a) \qquad OU \qquad (b-a)f(b)$$

Si f est $\mathcal{C}^1$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$R_0(f) = \pm\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$$

Démonstration ?

$$x_0 = a \qquad OU \qquad x_0 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t \qquad OU \qquad f(b)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = 1$$

Théorème 5 (Formule des rectangles)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx (b-a)f(a) \qquad OU \qquad (b-a)f(b)$$

Si f est $\mathcal{C}^1$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$R_0(f) = \pm\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$$

Démonstration ?

$$x_0 = a \qquad OU \qquad x_0 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t \qquad OU \qquad f(b)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = 1$$

Théorème 5 (Formule des rectangles)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx (b-a)f(a) \qquad OU \qquad (b-a)f(b)$$

Si f est $\mathcal{C}^1$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$R_0(f) = \pm\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$$

Démonstration ?

```python
def rect( f, a, b, n ):
    s = 0
    h = ( b - a ) / n
    for k in range( n ):
        s += h * f( a + k*h )
    return s
```

Cette méthode est-elle bien d'ordre 0 ?

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}t = (b-a) = f(a)(b-a)$$

$$\int_a^b t\,\mathrm{d}t = \frac{b^2-a^2}{2} \neq f(a)(b-a)$$

Cette méthode est-elle bien d'ordre 0 ?

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}t = (b-a) = f(a)(b-a)$$

$$\int_a^b t\,\mathrm{d}t = \frac{b^2-a^2}{2} \neq f(a)(b-a)$$

Cette méthode est-elle bien d'ordre 0 ?

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}t = (b-a) = f(a)(b-a)$$

$$\int_a^b t\,\mathrm{d}t = \frac{b^2-a^2}{2} \neq f(a)(b-a)$$

Sommaire

$$x_0 = a \qquad x_1 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_a^b \mathcal{L}_1(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = \frac{t-b}{a-b} \qquad \mathcal{L}_1(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

Calculez....

$$x_0 = a \qquad x_1 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a) \int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t + f(b) \int_a^b \mathcal{L}_1(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = \frac{t-b}{a-b} \qquad \mathcal{L}_1(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

Calculez....

$$x_0 = a \qquad x_1 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_a^b \mathcal{L}_1(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = \frac{t-b}{a-b} \qquad \mathcal{L}_1(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

Calculez....

Théorème 6 (Formule des trapèzes)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

$$x_0 = a \qquad x_1 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_a^b \mathcal{L}_1(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = \frac{t-b}{a-b} \qquad \mathcal{L}_1(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

Calculez....

Théorème 6 (Formule des trapèzes)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

$$x_0 = a \qquad x_1 = b$$

$$\mathcal{I}(f) = f(a)\int_a^b \mathcal{L}_0(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_a^b \mathcal{L}_1(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}_0(t) = \frac{t-b}{a-b} \qquad \mathcal{L}_1(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

Calculez....

Théorème 6 (Formule des trapèzes)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

Si f est $\mathcal{C}^2$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$|R_1(f)| = \frac{(b-a)^3}{12}|f''(\xi)|$$

Ipp de $\displaystyle\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t$ + théorème de la moyenne.
Ordre 1 ?

Si f est $\mathcal{C}^2$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$|R_1(f)| = \frac{(b-a)^3}{12}|f''(\xi)|$$

Ipp de $\displaystyle\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t$ + théorème de la moyenne.

Ordre 1 ?

Si f est $\mathcal{C}^2$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$|R_1(f)| = \frac{(b-a)^3}{12}|f''(\xi)|$$

Ipp de $\displaystyle\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t$ + théorème de la moyenne.
Ordre 1 ?

Exercice 1

Méthode du point milieu : quel est son ordre ?

Sommaire

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$$

Pour changer, allons dans la base des différences divisées :

$$P_2(t) = f[x_0] + f[x_0, x_1](t - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Calculez...

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$$

Pour changer, allons dans la base des différences divisées :

$$P_2(t) = f[x_0] + f[x_0, x_1](t - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Calculez...

Théorème [illegible] (Formule de Simpson)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$$

Pour changer, allons dans la base des différences divisées :

$$P_2(t) = f[x_0] + f[x_0, x_1](t - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Calculez...

Théorème 7 (Formule de Simpson)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$$

Pour changer, allons dans la base des différences divisées :

$$P_2(t) = f[x_0] + f[x_0, x_1](t - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Calculez...

Théorème 7 (Formule de Simpson)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+}{2}\right) + f(b)\right)$$

ordre ?

$$|R_2(f)| = \frac{(b-a)^5}{2880}|f^{(4)}(\xi)|$$

ordre ?

$$|R_2(f)| = \frac{(b-a)^5}{2880}|f^{(4)}(\xi)|$$

Méthode de Romberg : en TD

Sommaire

$$y'(x) = f(y(x), x)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,\mathrm{d}x = y'(x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = f(y_n, x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = h \times f(y_n, x_n)$$

$$y'(x) = f(y(x), x)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,\mathrm{d}x = y'(x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = f(y_n, x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = h \times f(y_n, x_n)$$

$$y'(x) = f(y(x), x)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,\mathrm{d}x = y'(x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = f(y_n, x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = h \times f(y_n, x_n)$$

$$y'(x) = f(y(x), x)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,\mathrm{d}x = y'(x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = f(y_n, x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = h \times f(y_n, x_n)$$

$$y'(x) = f(y(x), x)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,\mathrm{d}x = y'(x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = f(y_n, x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = h \times f(y_n, x_n)$$

```python
def rect(f, a, b, n):
    s = 0
    h = ( b - a ) / n
    for k in range( n ):
        s += h * f( a + k*h )
    return s
```

```python
def euler_exp(f, x0, xn, y0, n):
    yk = y0
    h  = ( xn - x0 ) / n
    Y  = [y0]
    for k in range( n ):
        yk = yk + h * f( yk,  x0 + k*h )
        Y += [yk]
    return Y
```

```python
def rect(f, a, b, n):
    s = 0
    h = ( b - a ) / n
    for k in range( n ):
        s += h * f( a + k*h )
    return s
```

```python
def euler_exp(f, x0, xn, y0, n):
    yk = y0
    h  = ( xn - x0 ) / n
    Y  = [y0]
    for k in range( n ):
        yk = yk + h * f( yk,  x0 + k*h )
        Y += [yk]
    return Y
```

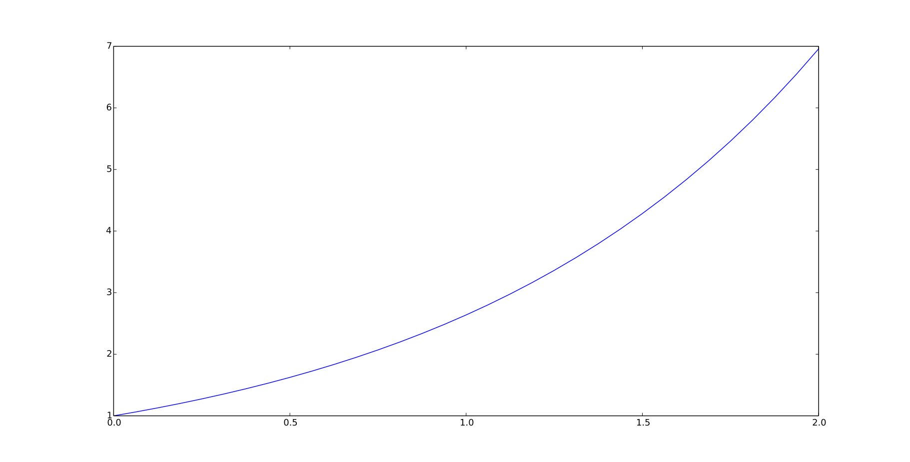
```python
def euler_exp(f, x0, xn, y0, n):
    h  = ( xn - x0 ) / float( n )
    Y  = [ y0 for k in range( n + 1 ) ]
    X  = [ x0 + k*h for k in range( n + 1 ) ]
    for k in range(1, n + 1 ):
        Y[k] = Y[k - 1] +  h * f( Y[k - 1], X[k] )
    return X,Y
```

```python
def trace_euler_exp(f, x0, xn, y0, n):
  X, Y = euler_exp(f, x0, xn, y0, n)
  plt.plot( X, Y )
  plt.show()
```

```
In [1]: trace_euler_exp( lambda y, x : y, 0, 2, 1, 2**5 )
```

```python
def trace_euler_exp(f, x0, xn, y0, n):
  X, Y = euler_exp(f, x0, xn, y0, n)
  plt.plot( X, Y )
  plt.show()
```

```
In [1]: trace_euler_exp( lambda y, x : y, 0, 2, 1, 2**5 )
```


7
6
5
4
3
2
1
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0