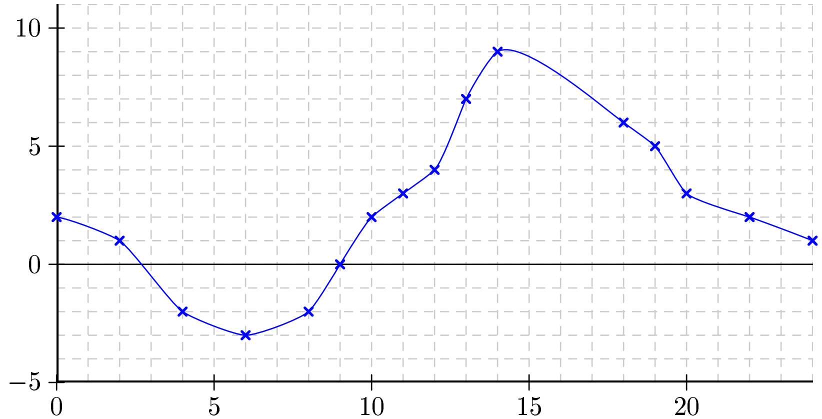
Fiche d'exercices n°2 - Généralités sur les fonctions - 2$^{\text{nde}}$4

Introduction aux fonctions

Exercice 1

Un appareil a permis de relever la température dans un abri, de manière continue de 0 heures à 24 heures. Les points notés sur la courbe indiquent des relevés exacts.



Sur ce graphique, on peut lire par exemple qu'à 12h00, la température était de 4°. Au nombre 12 est ainsi associé la valeur 4. On note $f(12) = 4$ ou encore $f : 12 \mapsto 4$. f représente l'association entre l'heure et la température : c'est une **fonction**. On dit que 12 a pour **image** 4 ou que 4 est **l'image de** 12 **par la fonction** f.

1. Compléter :

a) La température à 4h00 est de ... donc $f(4) =$... L'image de 4 par f est ...

b) $f(9) =$ .... L'image de 9 par la fonction f est .... Il faisait ... ° à ... heures.

c) L'image de 20 par f est ... donc la température était de ... à ...

d) $f(\ldots) = 7$ donc à ... heures la température était de ... °.

e) $f : 6 \mapsto \ldots$ donc l'image de ...

2. Expliquer pourquoi il n'existe pas plusieurs points distincts de la courbe qui ont la même abscisse ?

3. On note $\mathscr{D}_f$ l'intervalle de temps pendant lequel la température a été relevé. $\mathscr{D}_f = \ldots$

4. Plus généralement, on note x l'heure de l'enregistrement et $f(x)$ la température correspondante (avec x appartenant à $\mathscr{D}_f$). Compléter le tableau suivant :

x	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$f(x)$									

Vocabulaire

Exercice 2

Traduire par une égalité chacune des phrases suivantes :

1. L'image de 5 par la fonction f est égale à 4.

2. 5 est l'image de -3 par la fonction f.

3. 2 a pour image 0 par la fonction f.

4. Les images de 2 et 4 par la fonction f sont nulles.

5. Les nombres qui ont pour image 5 par la fonction f sont -3 et 0.

6. 1 est l'image des nombres -2 et 1 par la fonction f.

7. Au nombre 8, on associe le nombre 17 par la fonction f.

8. f est une fonction qui, au nombre -2 associe le nombre $\sqrt{3}$

9. f est la fonction qui a tout nombre réel x associe son carré.

10. f associe à tout nombre réel x la somme de son carré et de son triple.

11. La fonction f fait correspondre, à la durée t d'un trajet, la distance d parcourue.

Exercice 3

Traduire chaque égalité par une phrase, en utilisant le mot image :

1. $f(-2) = 1$

2. $f(x) = -2$

3. $g(4) = 0$

4. $b = g(0)$

5. $y = f(x)$

6. $v = f(t)$

Exercice 4

Traduire, si c'est possible, chacune des situations suivantes par une fonction.

1. On regarde l'aire d'un carré de côté x centimètres.

2. On regarde la taille d'un élève de x années.

3. On regarde le volume d'une sphère de rayon x.

4. On regarde l'intensité dans un circuit de tension 6 volts et de résistance $x\Omega$.

5. On regarde la longeur d'un rectangle d'aire 12cm^2 et de largeur x.

6. On regarde le nombre de pneux usées par une voiture de x années.

Exercice 5

on considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcccl} f & : &]2;+\infty[; & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{4x-8} \end{array}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Calculer l'image par f de 5, de $\sqrt{2}$, de 2.

3. Déterminer l'antécédent de 3 par f.

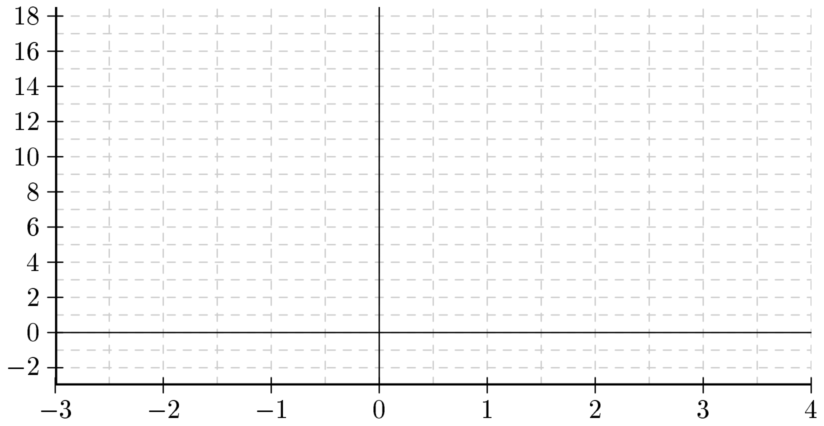
Représentation graphique

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $[-3;4]$ par $f(x) = x^2 - 3x$.

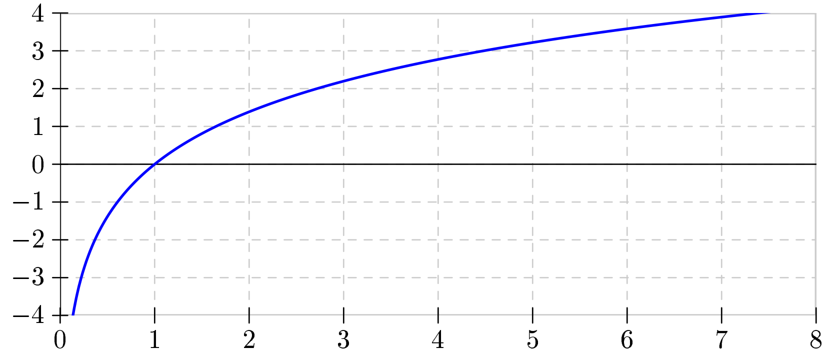
1. Dresser un tableau de valeurs de pas 1 pour x variant de -3 à 4.

2. Tracer la représentation graphique de f.



Exercice 7

La représentation graphique d'une fonction f est donnée ci-dessous.



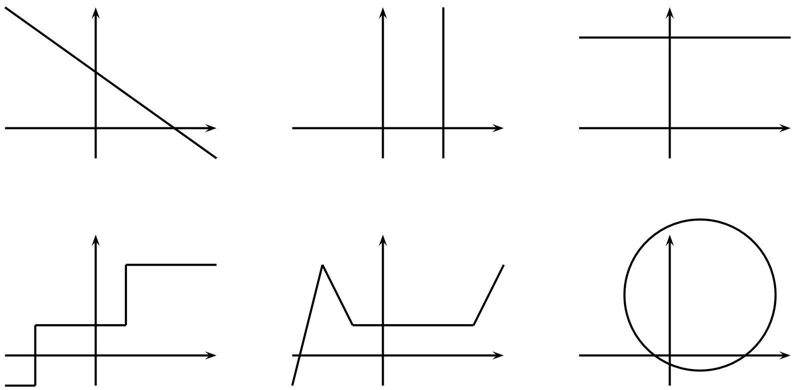
1. Trouver graphiquement les images des nombres suivants :
1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7.5 ; 0.5 ; -3 ; $\sqrt{2}$.

2. Trouver graphiquement les antécédents des nombres suivants :
1 ; 2 ; 3 ; -3 ; -1.5 ; -2 ; 0.

3. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on :
$f(x) = 2{,}5$? $f(x) = -1$? $f(x) = 4$?

Exercice 8

Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer s'il peut s'agir de la représentation graphique d'une fonction.



Exercice 9

Parmi les trois tableaux suivants, il y en a un qui ne peut être celui d'une fonction. Lequel et pourquoi ?

1.

x	-5	-2	0	1	10	-3	-4
y	2	3	1	7	5	4	6

2.

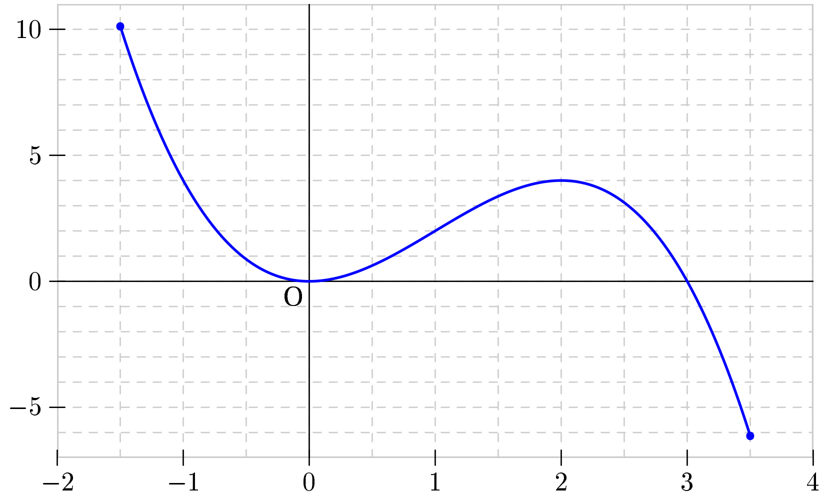
x	-5	-2	0	1	10	-3	-4
y	2	3	1	2	3	1	2

3.

x	-5	-2	0	-5	-2	0	-5
y	2	3	1	7	5	4	6

Exercice 10

La courbe d'une fonction f a été représentée ci-dessous. dire pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse.



1. 3.5 a pour image -6 par f.

2. 3 est l'image de 0 par f.

3. La courbe représentative de f a deux points d'abscisse nulle.

4. $f(-1) = f(2)$.

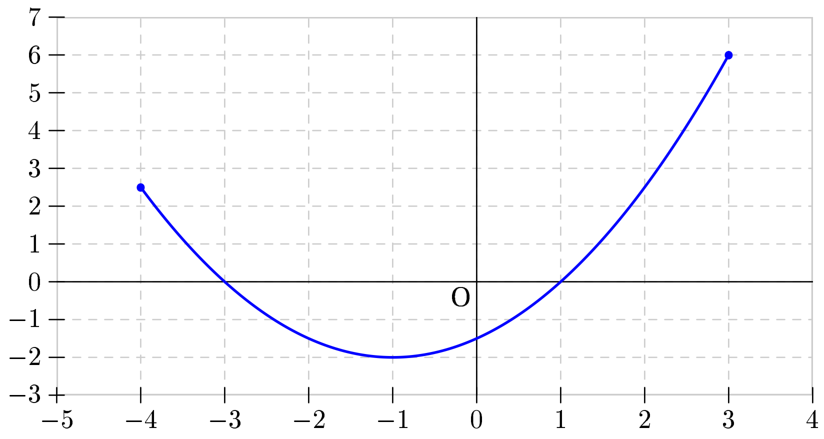
5. $f(x)$ n'est jamais inférieur à 1.5

6. $f(2) < f(3)$.

7. si $0 \leqslant x \leqslant 3$ alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

Exercice 11

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2;4]$ par $f(x) = 0.5(x+1)^2 - 2$:



1. a) Lire sur la courbe les images de 0 ; de −1 et de $\sqrt{2}$.
   b) Retrouver les résultats par le calcul.
2. a) Lire les antécedents de 0 ; de −3 et de −2.
   b) Retrouver les résultats par le calcul.
3. a) Graphiquement, estimer si les points suivants sont sur C_f : A(1;0) ; B(2;2) ; C(−3;0).
   b) Retrouver les résultats par le calcul.

Ensemble de définition

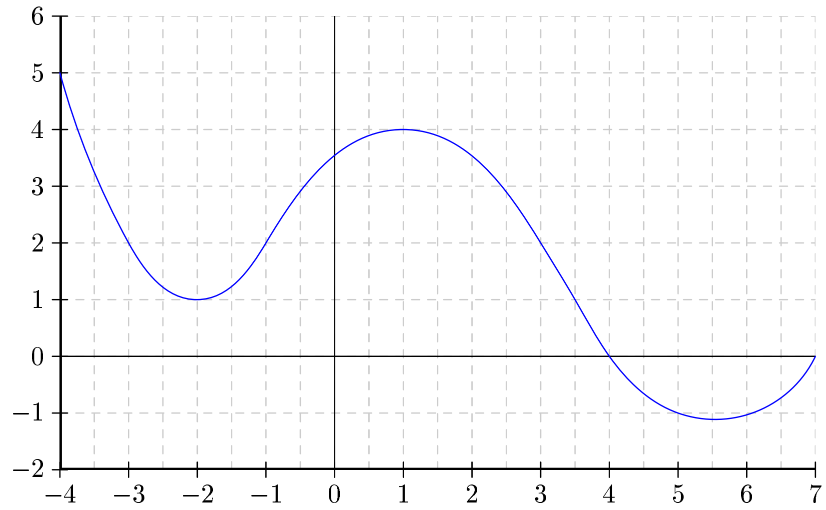
Exercice 12

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{7}{4x-2}$
2. $f(x) = \frac{3x-6}{3}$
3. $f(x) = \sqrt{x+1}$
4. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-2}}$
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{-2x+3}}{x+2}$
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+2}{-x+4}}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)(2x+4)}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$

Applications aux équations

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-4;7]$:

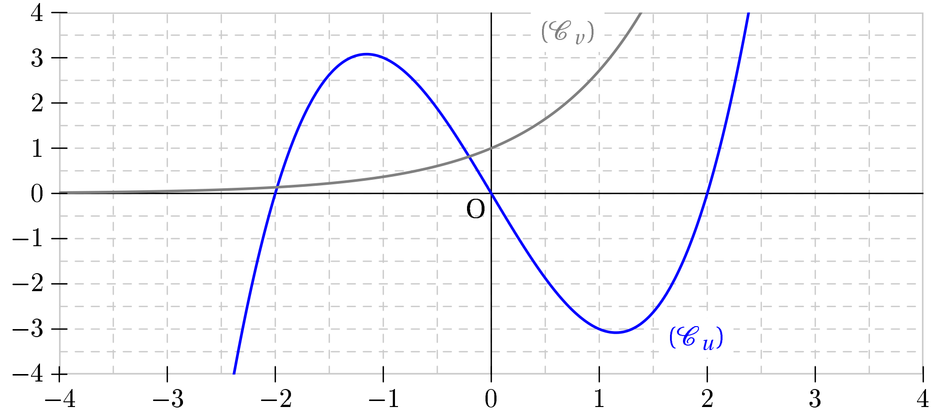


Résoudre graphiquement :

1. l'équation $f(x) = 2$;
2. l'équation $f(x) = -3$;
3. l'inéquation $f(x) < 2$;
4. l'inéquation $f(x) \geqslant 1$;
5. l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 13

Les représentations graphiques de deux fonctions u et v sont données ci-dessous :



1. Déterminer graphiquement les images de tous les entiers visibles sur ce graphique par chacune des fonctions u et v. On donnera les résultats dans 2 tableaux de valeurs.

2. Trouver les éventuels antécédents par u et par v de chacun des nombres suivants : 1 ; -2 ; 2 ; 1,7 ; 3,1.
3. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

$u(x) = 0{,}5$	$u(x) \leqslant 0$	$2 < u(x) < 3$
$v(x) = 0$	$v(x) \leqslant -3{,}5$	$-2 \leqslant v(x) \leqslant 2$
$u(x) = v(x)$	$u(x) \leqslant v(x)$	$u(x) > v(x)$.

Exercice 14

1. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $x^2 - \frac{10}{7}x - \frac{8}{7} = 0$.
2. Vérifier par le calcul les résultats précédents.
3. En développant le membre de droite, trouver la valeur de a telle que $x^2 - \frac{10}{7}x - \frac{8}{7} = (x-2)(x+a)$.
4. En déduire les valeurs exactes des deux solutions de l'équation de la question 1.

Exercice 15

1. Résoudre graphiquement puis grâce à un tableau de signes l'inéquation

$$(2x+3)(5-x) \geqslant 0.$$

2. Même question pour l'inéquation $3x^2 - 7x < 0$.

Exercice 16

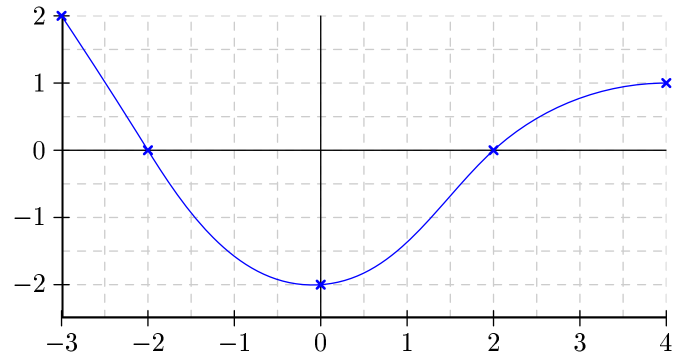
Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes, puis vérifier les résultats par le calcul.
Vous tracerez des courbes utiles sur l'écran de votre calculatrice ou de votre ordinateur.
Vous figurerez la résolution graphique par un rapide croquis sur votre feuille.

1. $3x - 4 = 2$;	**4.** $1 - \frac{1}{2}x \geqslant 0$;	**7.** $1 - \frac{1}{2}x = 3x - 4$;
2. $3x - 4 \leqslant -4$;	**5.** $1 - \frac{1}{2}x > 2$;	**8.** $1 - \frac{1}{2}x \geqslant 3x - 4$;
3. $3x - 4 > 5$;	**6.** $1 < 1 - \frac{1}{2}x < 4$;	**9.** $-2 < 1 - \frac{1}{2}x \leqslant 3x - 4$.

Variations

Exercice 17

La courbe ci-dessous représente une fonction f sur l'intervalle $[-3;4]$.



Décrire le comportement de f en utilisant les mots croissante sur, décroissante sur, minimum, maximum.

Exercice 18

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f sachant que :
- f est définie sur l'intervalle [-3 ;4] ;
- f admet un minimum en -1 et un maximum en 2 ;
- les images de -3 et de 4 sont respectivement 2 et 1 ;
- 0 a deux antécédents : -2 et 1.

Représentation graphique et calculatrice

Le but de ce module est d'apprendre à utiliser la calculatrice pour tracer la représentation graphique d'une fonction.

Exercice 19

Soit f_1 la fonction définie sur $[-5;5]$ par $f_1(x) = x^2 + 1$.

1. Dresser un tableau de valeur de pas 1 de la fonction f.

2. Déduire de ce tableau les valeurs extrêmes des abscisses et des ordonnées.

X_{min}=...	X_{max}=...
Y_{min}=...	Y_{max}=...

3. Votre calculatrice a des réglages d'affichage par défault. Afin de tracer la courbe dans une fenêtre adaptée, il faut indiquer à la machine les valeurs extrêmes (les bords) de la fenêtre d'affichage.

Sur le TI

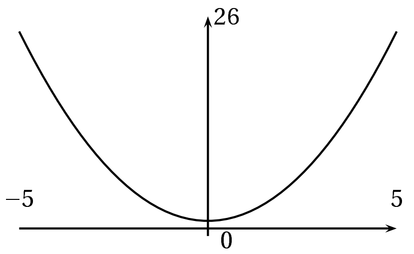
- Taper $\boxed{f(x) =}$ et entrer la valeur de l'expression de f.
- Taper $\boxed{\text{fenêtre}}$
- Remplacer les réglages X_{min}, X_{max},Y_{min},Y_{max} par les valeurs obtenues avec le tableau
- Taper $\boxed{\text{graphe}}$

Sur les CASIO

Pour une Casio :

- Entrer dans le **Menu Graph** et entrer la valeur de l'expression de f.
- Taper $\boxed{\text{V-Window}}$
- Remplacer les réglages X_{min}, X_{max},Y_{min},Y_{max} par les valeurs obtenues par le tableau
- Taper $\boxed{\text{F4}}$ (pour obtenir DRAW)

Vérifier que vous obtenez le tracé suivant :



Exercice 20

En procédant de le même manière, dessiner une allure de la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes : (On précisera à chaque fois les valeurs extrêmes de la fenêtre d'affichage).

$f_2(x) = x^5 + 32$ sur $[-2;2]$

X_{min} =

X_{max} =

Y_{min} =

Y_{max} =

$f_4(x) = (4x+1)^3(4x-9) + 10$ sur $[-2;3]$

X_{min} =

X_{max} =

Y_{min} =

Y_{max} =

$f_3(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[-4;4]$

X_{min} =

X_{max} =

Y_{min} =

Y_{max} =

$f_5(x) = \dfrac{x-5}{100}$ sur $[0;5]$

X_{min} =

X_{max} =

Y_{min} =

Y_{max} =

Exercice 21

Sur la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{8x+15}{4x+6}$ pour x variant de -4 à 2.

1. Pourquoi $-1,5$ n'a-t-il pas d'image par f ?

2. Comment cela se traduit-il sur l'écran de la calculatrice ?

Exercice 22

On cherche des valeurs approchées des coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g définies par : $f(x) = -x^2+5x-3$ et $g(x) = 2x-3$. (Window : x varie de -2 à 4 et y de -5 à 11)

1. Entrer la fonction f dans Y1 et la fonction g dans Y2.
2. Taper trace et utiliser les touches directionnelles pour lire des valeurs approchées des coordonnées des points d'intersection vus à l'écran.
3. En déduire des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ pour x compris -2 et 4.

Exercice 23

1. Tracer sur la calculatrice la courbe de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x^2+1}$ pour $x \in [-5;5]$.
2. Faire apparaître sur le même tracé la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = 0,5x$.
3. A l'aide de la touche TRACE de la calculatrice, lire les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.
4. Retrouver le résultat de la question précedente en résolvant par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

Fonction et XCAS

a. La base

XCAS est téléchargeable ici :
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/%7Eparisse/giac_fr.html
XCAS fait tout, sauf le café.
D'abord, occupons-nous des problèmes de base : tracé, équations, inéquations.

Reprenons un exemple précédent. Introduisons la fonction $f_3(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[-4;4]$

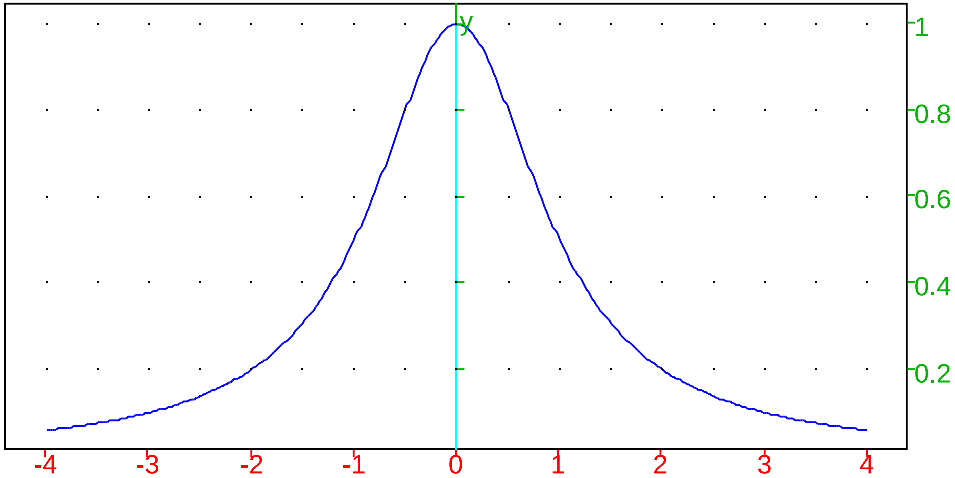
```
f3(x):=1/(1+x^2):;
```

Calculons quelques valeurs de $f_3(x)$:

```
f3(1); f3(1/2); f3(sqrt(2))
```

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{1}{3}$$

```
graphe(f3(x),x=-4..4,couleur=bleu)
```



Résolvons l'équation $f_3(x) = \frac{1}{4}$

```
resoudre(f3(x)=1/4,x)
```

$$[-\left(\sqrt{3}\right), \sqrt{3}]$$

Résolvons l'inéquation $f_3(x) \geqslant \frac{3}{2}$

```
resoudre(f3(x)>=1/2,x)
```

$$[(x \geq -1) \text{ and } (x \leq 1)]$$

Un peu d'informatique... calculons une suite de valeurs de $f_3(x)$. En XCAS, suite se dit `seq` (comme SÉQuence) :

```
seq(f3(x),x=-3..4) // de -3 jusque 4
```

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}$$

On peut aussi avoir des valeurs approchées en écrivant les nombres entiers suivis de .0

```
f3(1.0); f3(12.0)
```

0.500000,0.006897

b. Un problème d'optimisation

OAB est un triangle isocèle en O avec OA = 6 cm, OB = 6 cm. On place M sur [OA] et on note x = OM. On place N sur [OB] tel que BN = OM. Quand le point M varie sur [OA], le triangle OMN varie. On souhaite étudier l'aire du triangle OMN en fonction de x.
On ouvre une fenêtre de géométrie en tapant en même temps sur Alt et G
On entre les données suivantes :

```
O:=point(0,0);
A:=point(6,0);
B:=point(0,-6);
segment(A,B);
assume(x:=[1,0,6]);
M:=point(x,0);
N:=point(0,-6+x);
segment(M,N);
affichage(triangle(O,M,N),vert+rempli);
f:=x->aire(triangle(O,N,M));
P:=point(x,f(x));
```

On modifie x avec le curseur et on observe le déplacement de M sur [OA] et le déplacement de P.
On conjecture alors le maximum de f.
On fait apparaître la courbe de f

```
graphe(f(x),x=0..6,couleur=vert)
```

On fait apparaître la formule de l'aire

```
f(x)
```

(-x*(-6+x))/2

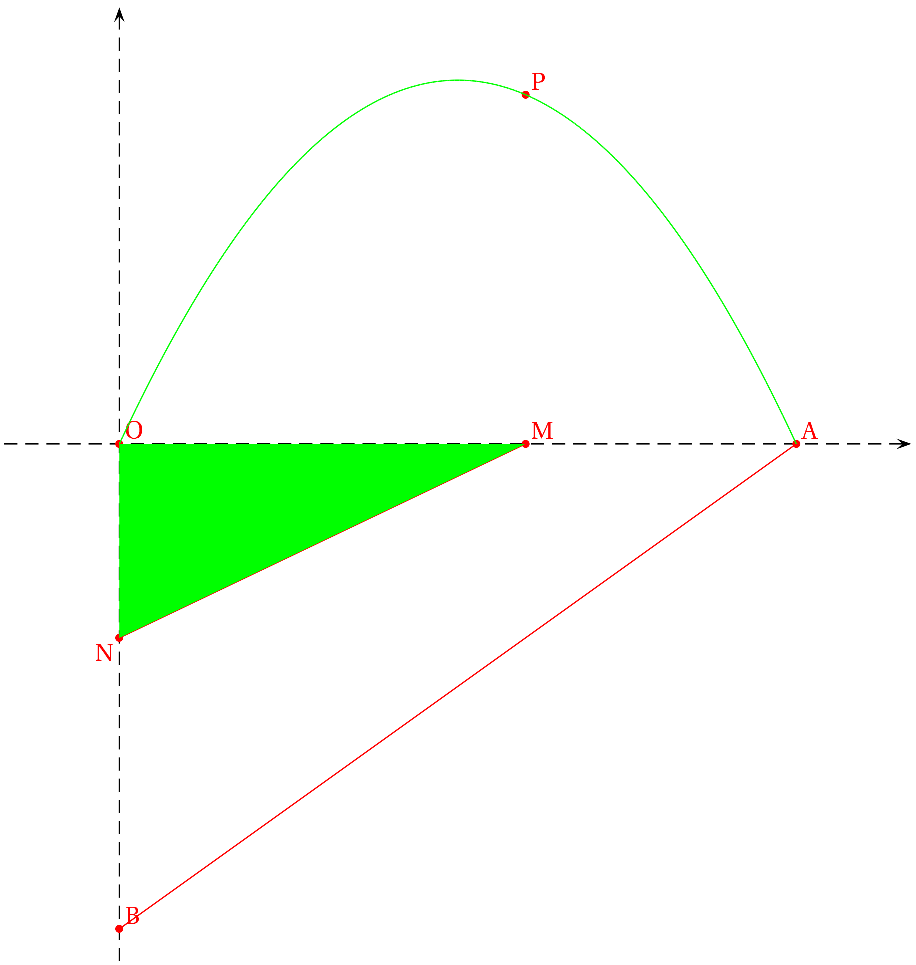
Ainsi $f(x) = \dfrac{x(6-x)}{2}$.
En faisant varier le curseur, on devine que le maximum de la fonction pourrait être atteint en $x = 3$.
Vérifions-le en résolvant l'inéquation $f(x) > f(3)$:

```
F:=x->(-x*(-6+x))/2:;
```

```
resoudre(F(x)>F(3))
```

[]

L'ensemble des solutions est vide : ainsi aucun réel n'a une image supérieure à celle de 3.
Le maximum de f sur $[0;6]$ est bien atteint en 3. La preuve a été faite par XCAS...



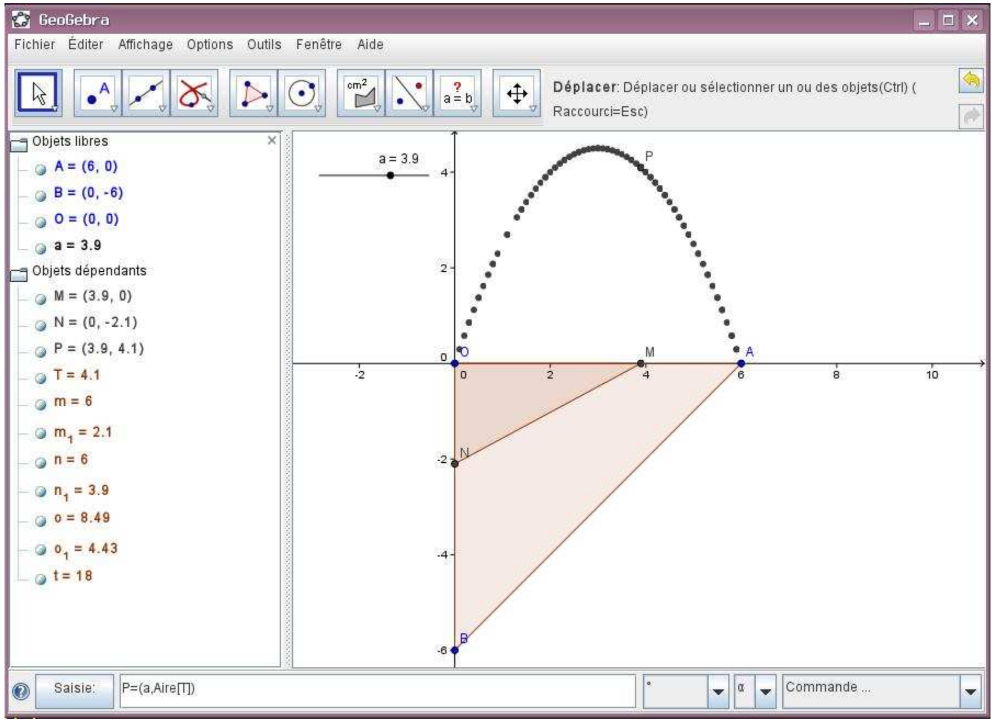
Optimisation et geogebra

On peut télécharger geogebra à cette adresse :

www.geogebra.org

Geogebra ne fait pas de calcul formel comme XCAS, ne permet pas de programmer comme XCAS, a un tableur depuis peu mais qui n'est pas programmable comme celui de XCAS et fait surtout de la géométrie dynamique comme XCAS... en plus joli (c'est son avantage !?)

Pour obtenir cette figure :

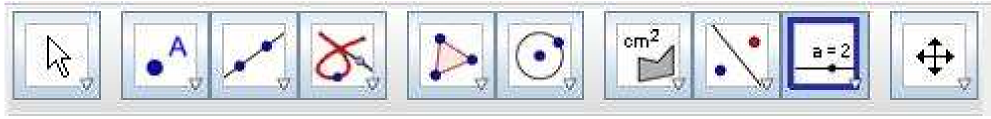


on va dans la fenêtre de saisie en bas et on tape successivement :

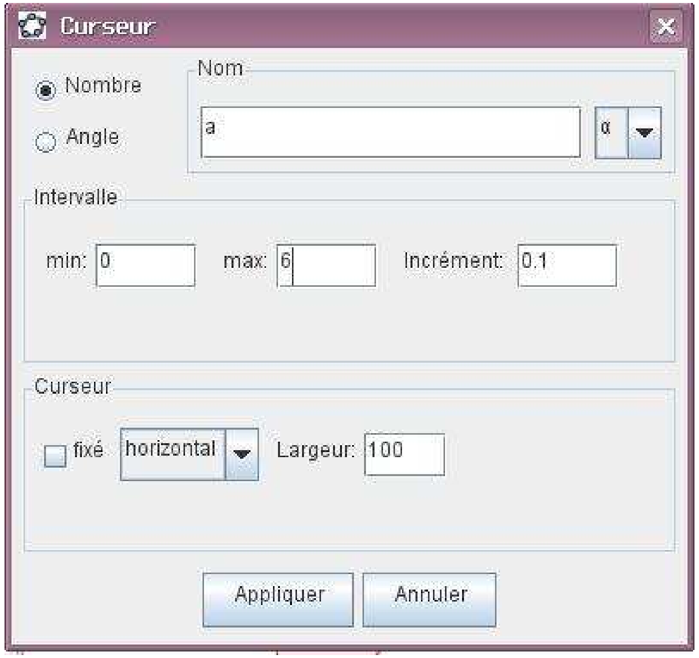
```
A=(6,0)
B=(0,-6)
O=(0,0)
t=Polygone[O,A,B]
```

Ensuite, on va créer un *curseur* qui va permettre, comme avec XCAS, de faire varier à la souris un paramètre.

Pour cela, on clique sur l'avant-dernière série d'icônes :



On clique ensuite sur l'endroit de la figure où on placera le curseur et on obtient cette fenêtre :



On fixe le minimum et le maximum.

On construit ensuite les objets qui dépendront de ce paramètre :

```
M=(a,0)
N=(0,-6+a)
T=Polygone[M,N,O]
P=(a,Aire[T])
```

En faisant varier le curseur, les points dépendant de a « bougent ».

Pour visualiser le chemin parcouru par P, on fait un clic droit sur le point P dans la fenêtre de gauche, rubrique *Objets dépendants* puis une fenêtre s'affiche : on clique sur *Trace activée*.

On fait à nouveau varier le curseur. On repère alors où pourrait se trouver le maximum.

Il est à noter que l'on ne fait qu'observer avec geogebra : on ne dispose pas de calcul formel pour pouvoir effectuer une preuve.

Optimisation et tableur

c. Tableur d'une suite bureautique

Faut-il vraiment en parler... ? C'est un outil très éloigné des mathématiques, les graphiques affichés sont souvent faux, il est très rébarbatif d'analyser un tableau rempli de chiffres... mais bon, les futurs élèves de série L l'utiliseront pour le Bac.

Il est à noter que XCAS possède un tableur plus puissant car largement programmable en vue d'une utilisation en mathématiques. En plus, les graphiques déduit du tableur XCAS sont corrects, eux !

Mais utilisons un tableur d'une suite bureautique quelconque.

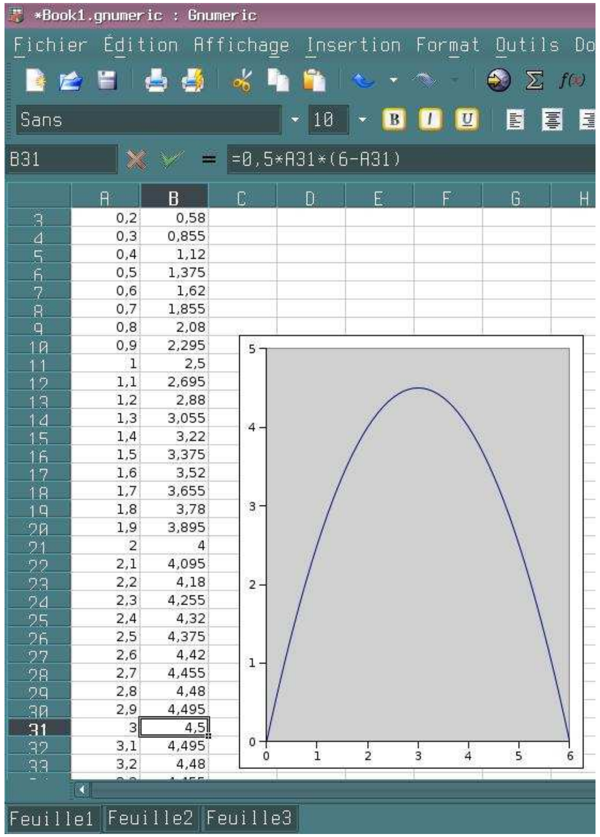
On entre dans la cellule A1 une première valeur du paramètre x : zéro en l'occurrence.

Dans A2 on entre =`A1+0,1`.

Dans B2, on entre l'aire du triangle OMN, c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{OM}\times\mathrm{ON}}{2}=\dfrac{x(6-x)}{2}$. Pour le tableur, cela s'écrit =`0,5*A2*(6-A2)`.

Avec la souris, on sélectionne les cellules A2 et B2 puis on se place dans le coin inférieur droit de la cellule B2 : la croix blanche devient noire. En maintenant appuyé, on descend jusqu'à ce que 6 soit affiché dans la colonne A (c'est un peu pénible). On mène l'enquête pour savoir où pourrait se trouver le maximum.

Ensuite on sélectionne les deux colonnes A et B puis on va dans `Insérer > Graphique` et on choisit le mode correspondant à une courbe.



d. Tableur de geogebra

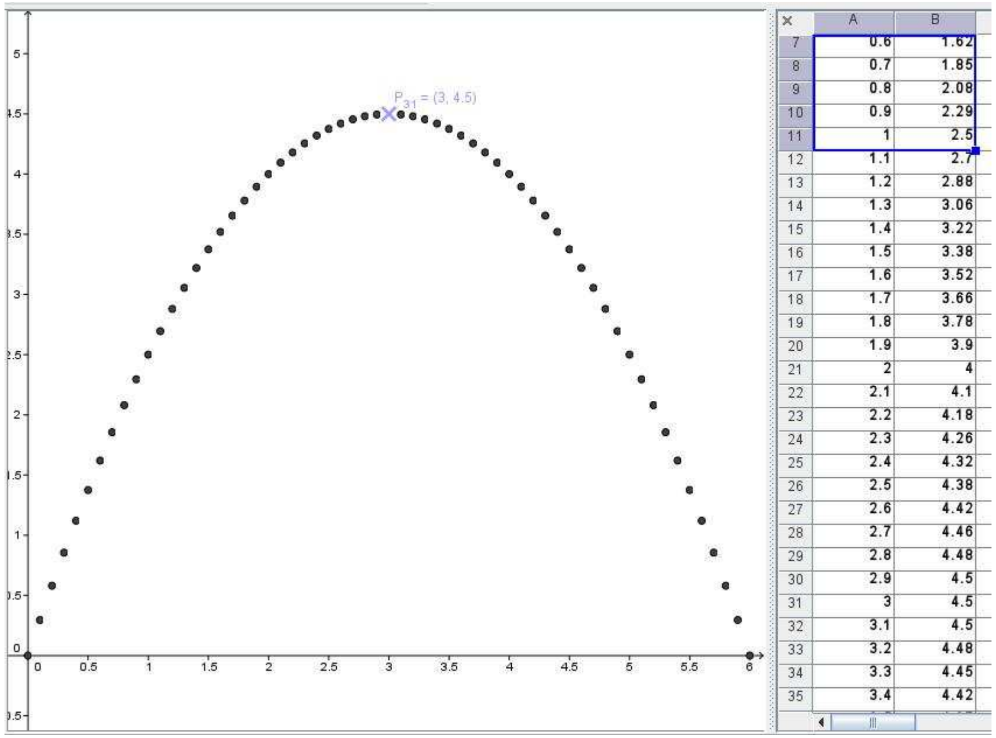
À ce jour, le tableur est dans la version « beta » de geogebra.

Il s'utilise comme un tableur usuel mais permet d'obtenir des courbes plus « jolies » que sur les tableurs basiques.

Pour obtenir le tableur, on va dans `Affichage->tableur` ou on tape sur Ctrl + Shift ⇑ + S .

On travaille sur les cellules comme d'habitude.

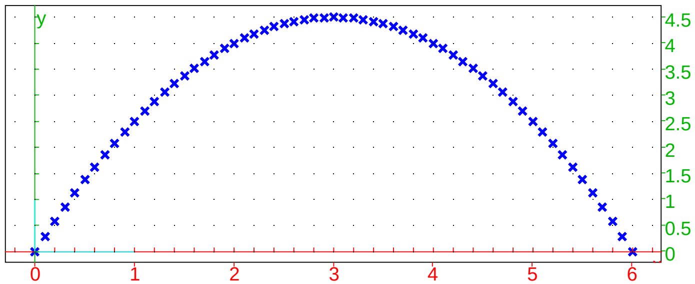
Pour obtenir le graphique, on sélectionne les cellules puis on effectue un clic droit `créer une liste de points`.



	A	B
7	0.6	1.62
8	0.7	1.85
9	0.8	2.08
10	0.9	2.29
11	1	2.5
12	1.1	2.7
13	1.2	2.88
14	1.3	3.06
15	1.4	3.22
16	1.5	3.38
17	1.6	3.52
18	1.7	3.66
19	1.8	3.78
20	1.9	3.9
21	2	4
22	2.1	4.1
23	2.2	4.18
24	2.3	4.26
25	2.4	4.32
26	2.5	4.38
27	2.6	4.42
28	2.7	4.46
29	2.8	4.48
30	2.9	4.5
31	3	4.5
32	3.1	4.5
33	3.2	4.48
34	3.3	4.45
35	3.4	4.42

e. Tableur et XCAS

On ouvre une session tableur en tapant Alt + T : on indique dans la fenêtre qui apparaît que l'on veut 61 lignes et 2 colonnes et on agit comme avec les autres. Pour copier vers le bas, on sélectionne la cellule à copier et on tape Ctrl + D (comme « Down »).
Pour obtenir le graphique, on sélectionne les cellules puis `Maths->2d-stats->scatterplot` et on obtient :



Optimisation et algorithme

On peut rechercher le maximum de manière plus précise grâce à un petit algorithme.
On repère graphiquement qu'une fonction semble atteindre par exemple un maximum comme dans les exemples précédents. Pour obtenir une approximation de ce maximum, on fournit un point de départ `xo` et une précision `h`.
Commentez ce programme malin CAML :

```
# let rec max_rec(f,xo,h)=
    if f(xo+.h)<f(xo) then xo
    else max_rec(f,xo+.h,h);;
```

Pour entrer une fonction à valeurs réelles sous CAML, voici une syntaxe possible :

```
# let g = function
      x -> x*.(6.-.x)/.2.  ;;
```

Quand on entre cette fonction, CAML répond :

```
   val g : float -> float = <fun>
```

Expliquez...
On l'utilise ainsi :

```
# max_rec(f,2.5,0.00001);;
- : float = 3.0000000000032756
```

Commentez...
Cela peut aussi s'écrire sous XCAS :

```
max_rec(f,xo,h):={
if(f(xo+h)<f(xo)){return(xo)}
else{max_rec(f,xo+h,h)}
}
```

Utilisez-le pour résoudre notre problème précédent.
Il existe une autre version de l'algorithme sous XCAS en utilisant des affectations :

```
maximum(f,xo,p):={
local X,Y,compteur;
Y:=f(xo);
X:=xo+10^(-p);
compteur:=0 // on rajoute un compteur pour que la
    compilation ne dure pas trop longtemps
tantque evalf(f(X))>Y et compteur<10^p faire
```

```
    Y:=evalf(f(X));
    X:=X+10^(-p);
    compteur:=compteur+1;
ftantque:;
 X-10^(-p);
}:;
```

C'est quand même plus compliqué...

Merci à Aymar de Saint Seine :
http ://lyceeenligne.free.fr/spip/
pour ses énoncés parfaits...

À vous de jouer...

Voici un autre problème d'optimisation : choisissez votre outil informatique pour l'illustrer ou le résoudre, calculatrice comprise. N'oubliez pas que vous devez prouver vos résultats...

Exercice 24

On considère un rectangle ABC rectangle en A tel que AC = 3 et AB = 4. Soit M un point quelconque du segemnt [AC]. On construit le rectangle AMNP tel que N appartienne à [BC] et P à [AB].
Étudiez l'aire du rectangle AMNP en fonction de la position de M. Vous déterminerez en particulier la(les) position(s) de M qui rend(ent) l'aire maximum.