CHAPITRE VII

INTÉGRALES DOUBLES

Résumé Nous allons découvrir dans ce chapitre une notion aux innombrables applications physiques. Compte tenu du peu d'heures dont nous disposons, nous nous contenterons d'un survol rapide en sacrifiant la cohérence et la rigueur du raisonnement mathématique.

1 - Définition

Nous avions introduit rigoureusement le calcul intégral lors du chapitre V. Grosso modo, nous avions interprété l'intégrale en termes de limite d'une somme et par suite en termes d'aire. Nous allons appliquer le même principe aux fonctions de deux variables.

Nous travaillerons sur des domaines du plan limités par une courbe fermée, qui sont en quelque sorte pour $\mathbb{R}^2$ ce que sont les intervalles fermés bornés (les segments) pour $\mathbb{R}$.

Considérons donc un domaine $\mathscr{D}$ dont les abscisses extrêmes sont respectivement a et b $(a < b)$ d'une part et c et d $(c < d)$ d'autre part, et une fonction f de deux variables **définie sur $\mathscr{D}$ et nulle ailleurs**.

Comme nous l'avions fait pour les fonctions d'une variable, nous allons subdiviser les segments $[a\,;\,b]$ et $[c\,;\,d]$

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

$$c = y_1 < y_2 < \cdots < y_p = d$$

On découpe ainsi notre domaine $\mathscr{D}$ en petits rectangles r_{ij} définis par

$$x_i < x < x_{i+1} \quad y_j < y < y_{j+1}$$

et d'aire $\Delta x_i \times \Delta y_j$ avec

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$$

On va prendre un point M_{ij} de coordonnées (α_i, β_j) appartenant à chacun de ces rectangles et qui les représentera.

Définition 1

On dira alors que la fonction de deux variables f est intégrable si et seulement si le nombre $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} f(\alpha_i,\beta_j) \times \Delta x_i \times \Delta y_j$, c'est à dire la somme de tous les produits $f(\alpha_i,\beta_j)\times\Delta x_i\times\Delta y_j$ sur tous les rectangles r_{ij} tend vers un nombre fini constant $\mathscr{I}(f,\mathscr{D})$ quand les Δx_i et les Δy_j tendent vers 0.
Dans ce cas, on note

$$\mathscr{I}(f,\mathscr{D}) = \iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

On admettra le résultat fondamental suivant

Théorème 1
Si f est continue sur $\mathscr{D}$, alors elle est intégrable sur $\mathscr{D}$

...sauf qu'on ne sait pas trop ce qu'est une fonction de 2 variables continue. Donc on supposera que tous les exercices proposées et toutes les situations physiques rencontrées utiliseront des fonctions intégrables là où il faut : fermez les yeux et faites-nous confiance...mouais.

2 - Interprétations graphiques

• Aire du domaine $\mathscr{D}$

D'après notre approche de la définition d'une fonction intégrable, $\iint_{\mathscr{D}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est la limite de la somme des aires des « petits rectangles », donc c'est l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

• Volume d'un cylindre

Chaque produit $f(\alpha_i,\beta_j)\times\Delta x_i\times\Delta y_j$ est égal au volume du pavé droit de base le rectangle r_{ij} et de hauteur $f(\alpha_i,\beta_j)$[1]. Or dans un RON $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, $z=f(x,y)$ est l'équation d'une surface $\mathscr{S}$. Alors l'intégrale double $\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est en fait la mesure du volume limité par la surface $\mathscr{S}$, le plan $(x\mathrm{O}y)$ et le cylindre de section droite le domaine $\mathscr{D}$: c'est une généralisation de l'interprétation de l'intégrale (simple) mais avec une dimension de plus.

IMPORTANT comme la double intégration est une généralisation de la simple, on admettra que les propriétés vues à la leçon V s'appliquent aux intégrales doubles, à savoir la linéarité, la positivité, la conservation de l'ordre, etc.

Exercice 1

Énocez ces propriétés dans le cas de l'intégrale double en les transcrivant sous forme de ... formules.

3 - Calcul des intégrales doubles en coordonnées cartésiennes

• Le domaine $\mathscr{D}$ est rectangulaire

C'est le cas le plus simple, car le plus proche de l'intégration simple[2].

Soit donc $\mathscr{D}$ le domaine $[a\,;b]\times[c\,;d]$.

L'intégrale $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ est une fonction ne dépendant que de x : notons $\mathrm{F}(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

[1] Voir la figure faite au tableau pendant votre partie de bataille navale

[2] Sachant toujours que nous ne considérons que des fonctions continues, et que toutes les fonctions rencontrées seront continues là où il faut, donc nous ne nous poserons plus de question à ce sujet pourtant fondamental.

On peut alors calculer l'intégrale $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_a^b \mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

On calcule de même l'intégrale $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_c^d \mathrm{G}(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

Des théorèmes qui sortent du cadre de notre cours permettent de démontrer qu'en fait $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2 = \displaystyle\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$:

Théorème 2 Théorème de Fubini dans le cas d'un domaine rectangulaire

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Exemple : Soit $\mathscr{D}$ le domaine défini par $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $f\,:\,(x,y) \mapsto f(x,y) = x\mathrm{e}^{xy} + 3xy^2$.

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_0^1 x\mathrm{e}^{xy} + 3xy^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(\left[\frac{x}{x}\mathrm{e}^{xy} + \frac{3xy^3}{3}\right]_0^1\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(\mathrm{e}^x - 1 + x\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\mathrm{e}^x - x + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 \\
&= \mathrm{e}^2 - 2 + 2 - 1 = \mathrm{e}^2 - 1
\end{aligned}$$

Exercice 2

Reprendre l'exemple précédent, mais en commençant par intégrer par rapport à x (Reconnaître une forme u/v : difficile...).

Exercice 3

On considère le domaine $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\right\}$. Calculer $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans les cas suivants

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{1+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$

• Domaine quelconque

Considérons une courbe fermée un peu spéciale : des parallèles aux axes de coordonnées ne la coupent qu'en deux points au maximum[3] (on dit qu'elle est convexe). Elle est comme d'habitude comprise dans le rectangle $[a\,;b] \times [c\,;d]$.

Alors pour une valeur de $x \in [a\,;b]$ donnée, on peut définir les deux ordonnées des points d'intersection de la courbe avec la droite « verticale » passant par le point de coordonnées $(x,0)$. Notons ces coordonnées $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

On peut faire de même avec toute valeur de y dans $[c\,;d]$.

On montre alors que le théorème de Fubini s'applique encore

[3] Réveillez-vous ! Le dessin est au tableau...

Théorème 3 Théorème de Fubini dans le cas d'un domaine « convexe »

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Lorsque $\mathscr{D}$ n'est plus convexe, on découpe si possible le domaine en parties convexes disjointes.

Exemple : Calculons $\mathrm{I} = \iint_{\mathscr{D}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x+y \leqslant 3\right\}$.

Il faut commencer par dessiner le domaine. Il s'agit d'un trapèze rectangle. Le plus simple est de « balayer » le domaine à y constant. Alors

$$\mathrm{I} = \int_0^1 y \left(\int_0^{3-y} x\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_0^1 y(3-y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} - 2y^3 + \frac{9y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{11}{8}$$

Essayons maintenant de balayer à x constant. Nous allons découper le trapèze en deux parties par une droite parallèle à $(\mathrm{O}x)$: cela donne un rectangle $\mathscr{R}$ et un triangle rectangle $\mathscr{T}$ (voir la figure au tableau).

D'une part $\iint_{\mathscr{R}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x \left(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 1$

D'autre part $\iint_{\mathscr{T}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_2^3 x \left(\int_0^{3-x} y\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_2^3 x(3-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} \right]_2^3 = \frac{3}{8}$

Finalement, on obtient $\mathrm{I} = 1 + 3/8 = 11/8$.

Exercice 4

Calculer $\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans les cas suivants

1. $f(x,y) = x^2 y$ et $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant 0,\ x-y \geqslant 0\right\}$
2. $f(x,y) = (x^2+y)$ et $\mathscr{D}$ est le triangle de sommets $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,1)$ et $\mathrm{B}(2,-2)$.
3. $f(x,y) = x\mathrm{e}^{x+2xy}$, $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2, xy \geqslant 2\right\}$

4 - Passage en coordonnées polaires

Lorsque le domaine étudié est une portion de disque ou d'une surface engendrée par une courbe en coordonnées polaires, il est utile d'effectuer un changement de variables. Le domaine $\mathscr{D}$ en fonction de x et y devient un domaine Δ en fonction de r et θ qu'on espère plus simple à « manœuvrer ».

Nous admettrons la formule suivante qui utilise un clacul de déterminant que vous découvrirez en algèbre linéaire.

Théorème 4 Passage en coordonnées polaires

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Exemple : Calculons $\mathrm{I} = \iint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, avec $\mathscr{D}$ le quart de cercle de centre O(0,0), de rayon 2 avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

D'abord, un petit dessin.

Sachant que $x^2+y^2=r^2$, $\mathrm{I} = \iint_{\Delta} r^2 \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, avec $\Delta = \{(r,\theta)\,|\,0 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\}$

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi$$

Exercice 5

1. Calculer $\iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $\mathscr{D} = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 1\}$

2. Calculer $\iint_{\mathscr{D}} x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $\mathscr{D} = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant x\}$

3. Calculer $\iint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $\mathscr{D} = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant x,\ x^2+y^2 \geqslant y\}$

Exercice 6

Vous allez bientôt utiliser en probabilité l'intégrale $\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Nous n'avons pas étudié ce genre d'intégrale avec une borne infinie, mais étant donné que le résultat que nous allons établir va vous être très rapidement utile et qu'une méthode de l'obtenir utilise les intégrales doubles, nous allons malgré tout nous lancer.

Nous admettrons que I existe bel et bien et que de plus $\mathrm{I} = \lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{I}(a)$ avec $\mathrm{I}(a) = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrez que $\mathrm{J}(a) = \iint_{\mathscr{D}(a)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{I}^2(a)$ avec $\mathscr{D}(a)$ le carré $[-a,a] \times [-a,a]$.

2. Nous ne connaissons pas de primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$, alors le « x^2+y^2 » nous incite à vouloir passer en coordonnées polaires. Malheureusement, l'expression polaire du domaine $\mathscr{D}(a)$ semble problématique. Alors nous allons ruser. Appelons $\mathscr{C}(a)$ le disque de centre O et de rayon a et $\mathrm{G}(a) = \iint_{\mathscr{C}(a)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Montrez que $\mathrm{G}(a) \leqslant \mathrm{J}(a) \leqslant \mathrm{G}(a\sqrt{2})$.

3. Faites un dessin, et calculez $\mathrm{G}(a)$ à l'aide d'un passage en coordonnées polaires.

4. Déduisez-en $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{G}(a)$, puis $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{J}(a)$. Déduisez-en I.

5 - Applications physiques

• Masse d'une « plaque »

Si on connait la masse surfacique $f(x,y)$ d'une « plaque » homogène $\mathscr{D}$, alors sa masse vaut $\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

• Moments d'inertie

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, les moments d'inertie de la plaque par rapport à (Ox) et (Oy) valent respectivement $\iint_{\mathscr{D}} y^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $\iint_{\mathscr{D}} x^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

• Centre de gravité

Toujours dans les mêmes conditions, les coordonnées du centre de gravité de la plaque sont $\dfrac{1}{\mathscr{M}}\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} x\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $\dfrac{1}{\mathscr{M}}\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} y\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, avec $\mathscr{M}$ la masse de la plaque dont le calcul a été explicité plus haut.

Exercice 7

Déterminez le centre de gravité du domaine limité par le cercle de centre O, de rayon 1 et par les demi-droites d'équations $\theta = \pi/6$ et $\theta = \pi/2$.

Exercice 8

Déterminez le moment d'inertie d'un disque homogène de centre O et de rayon 1 inclus dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ par rapport à l'axe $(\mathrm{O}y)$