Matrices et programmation

INFO2 - Semaine 9

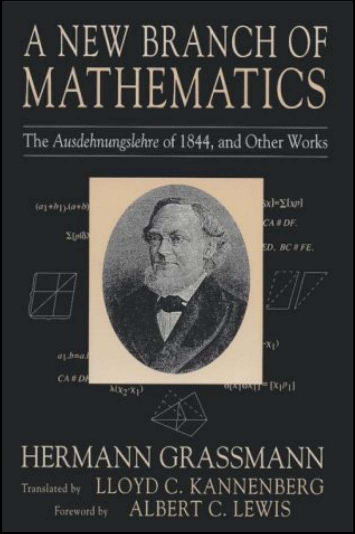
Guillaume CONNAN

IUT de Nantes - Dpt d'informatique

Dernière mise à jour : 10 mars 2015 à 21:55

Sommaire

Sommaire



Hermann Graßmann (1809-1877)

Stefan Banach (1892-1945)


0
100
200
300
400
0
50
100
150
200
250
300


0
100
200
300
400
0
50
100
150
200
250
300


0
100
200
300
400
0
50
100
150
200
250
300

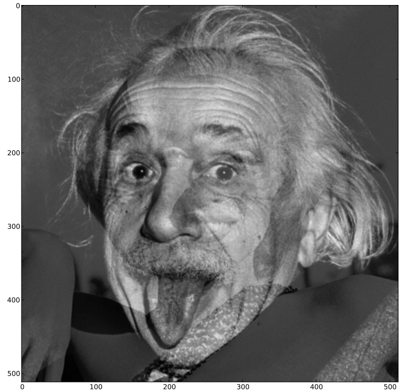

0
100
200
300
400
0
50
100
150
200
250
300

$3 \times$ Marylin + Albert

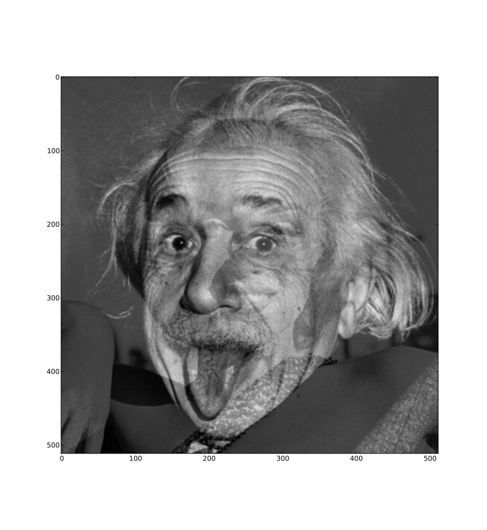
$3 \times$ Marylin + Albert

Marylin + Albert

Marylin + Albert



Marylin + 3 × Albert



Marylin $+ 3 \times$ Albert

Un complexe ? La donnée de deux scalaires...

```
module ALcomplexes where

    type Scalaire = Int
    type Re = Scalaire
    type Im = Scalaire

    data Complexe = Re ::: Im
```

```
> let z = 3:::2
> z
3 + 2i
```

Un complexe ? La donnée de deux scalaires...

```
module ALcomplexes where

    type Scalaire = Int
    type Re = Scalaire
    type Im = Scalaire

    data Complexe = Re ::: Im
```

```
> let z = 3:::2
> z
3 + 2i
```

Un complexe ? La donnée de deux scalaires...

```haskell
module ALcomplexes where

    type Scalaire = Int
    type Re = Scalaire
    type Im = Scalaire

    data Complexe = Re ::: Im
```

```
> let z = 3:::2
> z
3 + 2i
```

```haskell
instance Show Complexe where
      show (r:::i) = (show r) ++ " + " ++ (show i) ++ "i"
```

Somme ?

```
(@+) :: Complexe -> Complexe  -> Complexe
(@+)    (r:::i)     (r':::i') =  (r + r'):::(i + i')
```

```
> z
3 + 2i
> z @+ z
6 + 4i
```

Somme ?

```
(@+) :: Complexe -> Complexe  -> Complexe
(@+)    (r:::i)     (r':::i') =  (r + r'):::(i + i')
```

```
> z
3 + 2i
> z @+ z
6 + 4i
```

Somme ?

```
(@+) :: Complexe -> Complexe  -> Complexe
(@+)    (r:::i)     (r':::i') =  (r + r'):::(i + i')
```

```
> z
3 + 2i
> z @+ z
6 + 4i
```

$3 * z$? Types ?

```
(@.) :: Scalaire -> Complexe  -> Complexe
(@.)    k           (r:::i)   =  (k*r):::(k*i)
```

```
> z
3 + 2i
> 3 @. z
9 + 6i
> z @+ ((-2) @. z)
-3 + -2i
```

$3 * z$? Types ?

```
(@.) :: Scalaire -> Complexe  -> Complexe
(@.)    k           (r:::i)    =  (k*r):::(k*i)
```

```
> z
3 + 2i
> 3 @. z
9 + 6i
> z @+ ((-2) @. z)
-3 + -2i
```

$3 * z$? Types ?

```
(@.) :: Scalaire -> Complexe  -> Complexe
(@.)    k           (r:::i)   =  (k*r):::(k*i)
```

```
> z
3 + 2i
> 3 @. z
9 + 6i
> z @+ ((-2) @. z)
-3 + -2i
```

Définition 1 ($\mathbb{K}$-espace vectoriel)

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V sur un corps commutatif $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ est un groupe abélien $\langle V, \dagger \rangle$ muni d'une loi de composition *externe* $\cdot$ de $\mathbb{K} \otimes V$ dans V vérifiant les quatre axiomes suivant, λ et μ désignant des scalaires quelconques, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ des vecteurs quelconques et $1_\odot$ l'élément neutre de la loi $\odot$ sur $\mathbb{K}$:

$$(\lambda \oplus \mu) \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \cdot \boldsymbol{u} \dagger \mu \cdot \boldsymbol{u} \quad \text{(distributivité vectorielle) ;}$$

$$\lambda \cdot (\boldsymbol{u} \dagger \boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \boldsymbol{u} \dagger \lambda \cdot \boldsymbol{v} \quad \text{(distributivité scalaire) ;}$$

$$(\lambda \odot \mu) \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{u}) \quad \text{(associativité) ;}$$

$$1_\odot \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \quad \text{(axiome d'identité)}$$

On dit que le corps $\mathbb{K}$ *opère* sur le groupe $\langle V, \dagger \rangle$.

Python

```
imshow(3 * marilyn + einstein, cmap = cm.gray)
```

Définition 1 ($\mathbb{K}$-espace vectoriel)

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V sur un corps commutatif $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ est un groupe abélien $\langle V, \dagger \rangle$ muni d'une loi de composition *externe* $\cdot$ de $\mathbb{K} \otimes V$ dans V vérifiant les quatre axiomes suivant, λ et μ désignant des scalaires quelconques, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ des vecteurs quelconques et $1_\odot$ l'élément neutre de la loi $\odot$ sur $\mathbb{K}$:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda \oplus \mu) \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \cdot \boldsymbol{u} \dagger \mu \cdot \boldsymbol{u} && \text{(distributivité vectorielle) ;}\\
&\lambda \cdot (\boldsymbol{u} \dagger \boldsymbol{v}) = \lambda \cdot \boldsymbol{u} \dagger \lambda \cdot \boldsymbol{v} && \text{(distributivité scalaire) ;}\\
&(\lambda \odot \mu) \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{u}) && \text{(associativité) ;}\\
&1_\odot \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} && \text{(axiome d'identité)}
\end{aligned}
$$

On dit que le corps $\mathbb{K}$ *opère* sur le groupe $\langle V, \dagger \rangle$.

Python

```
imshow(3 * marilyn + einstein, cmap = cm.gray)
```

Matrice ?

```
type Indice = Int
type Taille = (Indice,Indice)
```

```
data  Matrice coeffs =
        Mat (Taille, (Indice,Indice) -> coeffs)
```

```
Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
```

??

Matrice ?

```
type Indice = Int
type Taille = (Indice,Indice)
```

```
data  Matrice coeffs =
        Mat (Taille, (Indice,Indice) -> coeffs)
```

```
Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
```

??

Matrice ?

```haskell
type Indice = Int
type Taille = (Indice,Indice)
```

```haskell
data  Matrice coeffs =
        Mat (Taille, (Indice,Indice) -> coeffs)
```

```haskell
Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
```

? ?

Matrice ?

```
type Indice = Int
type Taille = (Indice,Indice)
```

```
data  Matrice coeffs =
        Mat (Taille, (Indice,Indice) -> coeffs)
```

```
Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
```

? ?

Matrice ?

```haskell
  type Indice = Int
  type Taille = (Indice,Indice)
```

```haskell
data  Matrice coeffs =
        Mat (Taille, (Indice,Indice) -> coeffs)
```

```haskell
Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
```

? ?

```
> let ma = Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14
```

Somme

Comment additionner deux matrices ?

```
(@+) :: (Num t)=> Matrice t   -> Matrice t            -> Matrice t
(@+)              (Mat (t,f))    (Mat (t',f'))
        | t == t'   = Mat(t, \ (i,j) -> f(i,j) + f'(i,j))
        | otherwise = error "Somme : tailles incompatibles"
```

Somme

Comment additionner deux matrices ?

```
(@+) :: (Num t)=> Matrice t   -> Matrice t           -> Matrice
     ↪ t
(@+)              (Mat (t,f))    (Mat (t',f'))
        | t == t'    = Mat(t, \ (i,j) -> f(i,j) + f'(i,j))
        | otherwise = error "Somme : tailles incompatibles"
```

Somme

```
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14

> ma @+ ma
 0   2   4
 6   8  10
12  14  16
18  20  22
24  26  28
```

Produit par un scalaire

Multiplier une matrice par un scalaire ?

```
instance Functor Matrice where
              fmap g (Mat(taille,f)) = Mat(taille, g.f)
```

```
(@.) :: (Num t) => t -> Matrice t -> Matrice t
(@.)              k                = fmap (* k)
```

Produit par un scalaire

Multiplier une matrice par un scalaire ?

```
instance Functor Matrice where
               fmap g (Mat(taille,f)) = Mat(taille, g.f)
```

```
(@.) :: (Num t) => t -> Matrice t -> Matrice t
(@.)               k                = fmap (* k)
```

Produit par un scalaire

Multiplier une matrice par un scalaire ?

```
instance Functor Matrice where
              fmap g (Mat(taille,f)) = Mat(taille, g.f)
```

```
(@.) :: (Num t) => t -> Matrice t -> Matrice t
(@.)               k                = fmap (* k)
```

Produit par un scalaire

```
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14

> (-4) @. ma
  0   -4   -8
-12  -16  -20
-24  -28  -32
-36  -40  -44
-48  -52  -56
```

```
instance (Num t) => Num (Matrice t) where
    ???
```

```
> let ma = Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
> let mb = fromListe (3,2) [1..6] :: Matrice Int
```

```
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14
```

```
> mb
1  2
3  4
5  6
```

```
> let ma = Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
> let mb = fromListe (3,2) [1..6] :: Matrice Int
```

```
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14
```

```
> mb
1  2
3  4
5  6
```

```
> let ma = Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
> let mb = fromListe (3,2) [1..6] :: Matrice Int
```

```
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14
```

```
> mb
1  2
3  4
5  6
```

```
> ma + ma
 0   2   4
 6   8  10
12  14  16
18  20  22
24  26  28
```

```
> ma * mb
 13   16
 40   52
 67   88
 94  124
121  160
```

```
> ma + ma
 0   2   4
 6   8  10
12  14  16
18  20  22
24  26  28
```

```
> ma * mb
 13   16
 40   52
 67   88
 94  124
121  160
```

Définition 2 (Combinaison linéaire de vecteurs)

Soit $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ un corps opérant sur le groupe $\langle V, \dagger \rangle$ pour former un espace vectoriel de produit externe $\bullet$.

Soit $\langle \boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_1}, \cdots, \boldsymbol{u_p} \rangle$ une famille de vecteurs de V.

Un vecteur $\boldsymbol{v}$ de V est une combinaison linéaire de la famille des $\langle \boldsymbol{u_i} \rangle_{0 \leqslant i \leqslant p}$ si, et seulement si, il existe une famille $\langle \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p \rangle$ de scalaires de $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\boldsymbol{v} = \dagger_{i=0}^{i=p} \lambda_i \bullet \boldsymbol{u_i} = \lambda_0 \bullet \boldsymbol{u_0} \dagger \lambda_1 \bullet \boldsymbol{u_1} \dagger \cdots \dagger \lambda_p \bullet \boldsymbol{u_p}$$

L'ensemble de ces combinaisons linéaires est noté :

$$\mathcal{V}\mathrm{ect}\{\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{u_1}, \cdots, \boldsymbol{u_p}\}$$


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140

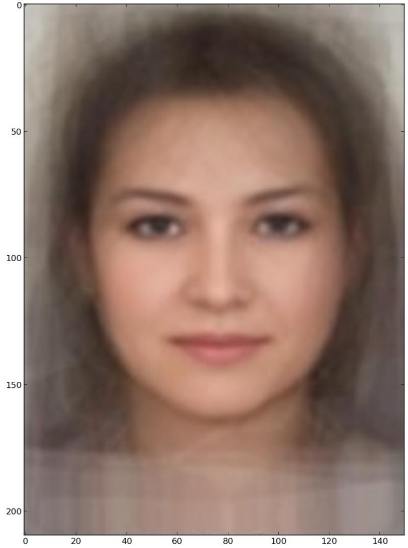

0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140

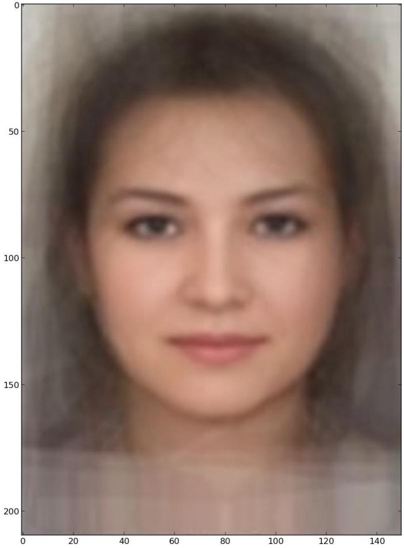

0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140

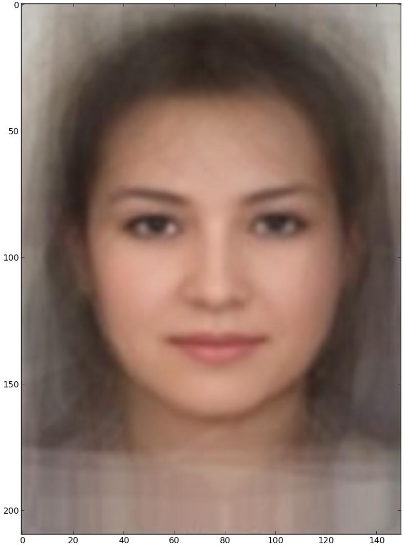

0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140

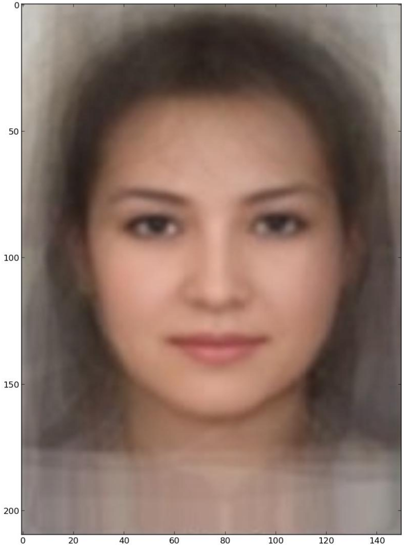

0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140

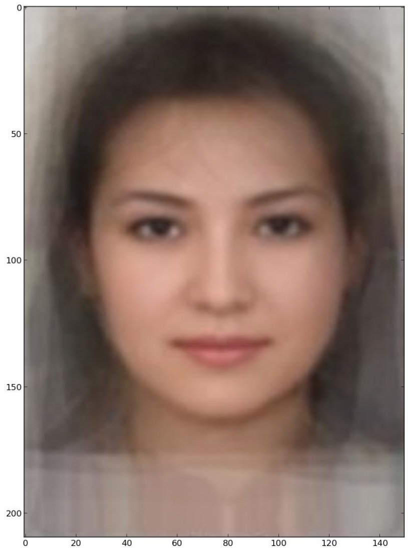

0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140

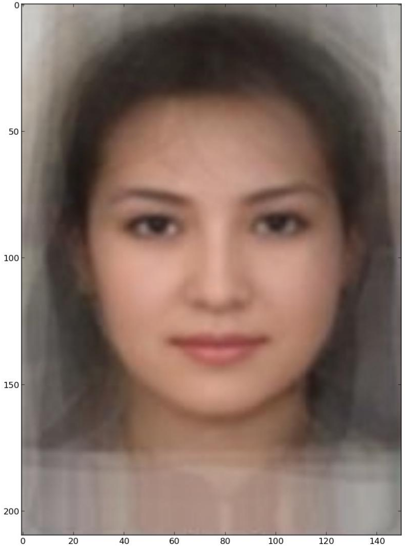

0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140

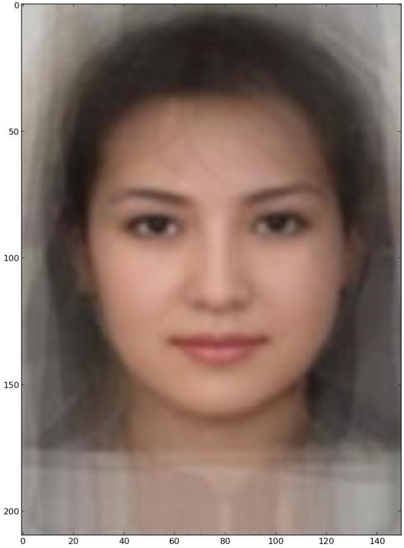

0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140

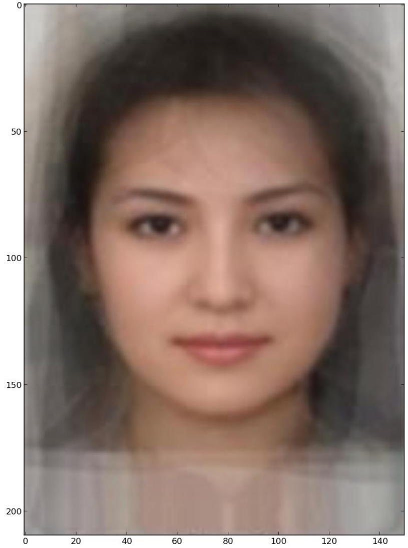

0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140

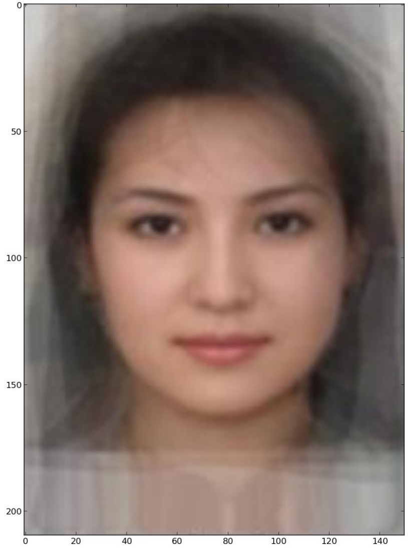

0
50
100
150
200
0 20 40 60 80 100 120 140

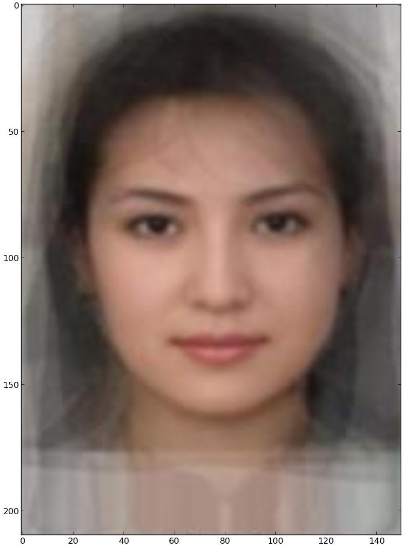

0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140


0
50
100
150
200
0
20
40
60
80
100
120
140

Python

```python
o = imread('ouzbek.png')

w = imread('welsh.png')

def fondu(n):
    for k in range(n+1):
        t = k / float(n)
        imshow(t*o + (1-t)*w)
        savefig("ow" + str(k) + ".jpg")
```

LATEX

```latex
\multido{\n=0+1}{21}{
\begin{frame}
\begin{center}
  \includegraphics[height=\textheight]{ow\n}
\end{center}
\end{frame}}
```

Python

```python
o = imread('ouzbek.png')

w = imread('welsh.png')

def fondu(n):
    for k in range(n+1):
        t = k / float(n)
        imshow(t*o + (1-t)*w)
        savefig("ow" + str(k) + ".jpg")
```

LaTeX

```latex
\multido{\n=0+1}{21}{
\begin{frame}
\begin{center}
  \includegraphics[height=\textheight]{ow\n}
\end{center}
\end{frame}}
```

Définition 3 (Sev)

Soit $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ un corps opérant sur le groupe $\langle V, \dagger \rangle$ pour former un espace vectoriel de produit externe $\bullet$.
Soit W un sous-ensemble de V.
Si, muni des mêmes opérations que V, W a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors on dit que W est un **sous-espace vectoriel** de V.

Théorème 4 (Caractérisation (1) des sous-espaces vectoriels)

Soit $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ *un corps opérant sur le groupe* $\langle V, \dagger \rangle$ *pour former un espace vectoriel de produit externe* $\bullet$.
Soit W *un sous-ensemble de* V.
W *est un sous-espace vectoriel (sev) de* V *si, et seulement si :*

- $W \neq \varnothing$
- $(\forall \boldsymbol{u})(\forall \boldsymbol{v})(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in W^2 \to \boldsymbol{u} \dagger \boldsymbol{v} \in W)$
- $(\forall \lambda)(\forall \boldsymbol{u})(\langle \lambda, \boldsymbol{u} \rangle \in \mathbb{K} \otimes W \to \lambda \bullet \boldsymbol{u} \in W)$

Théorème 4 (Caractérisation (1) des sous-espaces vectoriels)

Soit $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ *un corps opérant sur le groupe* $\langle V, \dagger \rangle$ *pour former un espace vectoriel de produit externe* $\bullet$.
Soit W *un sous-ensemble de* V.
W *est un sous-espace vectoriel (sev) de* V *si, et seulement si :*

- $W \neq \varnothing$
- $(\forall \boldsymbol{u})(\forall \boldsymbol{v})(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in W^2 \to \boldsymbol{u} \dagger \boldsymbol{v} \in W)$
- $(\forall \lambda)(\forall \boldsymbol{u})(\langle \lambda, \boldsymbol{u} \rangle \in \mathbb{K} \otimes W \to \lambda \bullet \boldsymbol{u} \in W)$

Théorème 4 (Caractérisation (1) des sous-espaces vectoriels)

Soit $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ *un corps opérant sur le groupe* $\langle V, \dagger \rangle$ *pour former un espace vectoriel de produit externe* $\bullet$.
Soit W *un sous-ensemble de* V.
W *est un sous-espace vectoriel (sev) de* V *si, et seulement si :*

- $W \neq \varnothing$
- $(\forall \boldsymbol{u})(\forall \boldsymbol{v})(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in W^2 \to \boldsymbol{u} \dagger \boldsymbol{v} \in W)$
- $(\forall \lambda)(\forall \boldsymbol{u})(\langle \lambda, \boldsymbol{u} \rangle \in \mathbb{K} \otimes W \to \lambda \bullet \boldsymbol{u} \in W)$

Théorème 4 (Caractérisation (1) des sous-espaces vectoriels)

Soit $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ un corps opérant sur le groupe $\langle V, \dagger \rangle$ pour former un espace vectoriel de produit externe $\bullet$.
Soit W un sous-ensemble de V.
W est un sous-espace vectoriel (sev) de V si, et seulement si :

- $W \neq \varnothing$
- $(\forall \boldsymbol{u})(\forall \boldsymbol{v})(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in W^2 \to \boldsymbol{u} \dagger \boldsymbol{v} \in W)$
- $(\forall \lambda)(\forall \boldsymbol{u})(\langle \lambda, \boldsymbol{u} \rangle \in \mathbb{K} \otimes W \to \lambda \bullet \boldsymbol{u} \in W)$

Théorème 5 (Caractérisation (2) des sous-espaces vectoriels)

Soit $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ *un corps opérant sur le groupe* $\langle V, \dagger \rangle$ *pour former un espace vectoriel de produit externe* $\bullet$.
Soit W *un sous-ensemble de* V.
W *est un sous-espace vectoriel (sev) de* V *si, et seulement si :*

- $\mathbf{0} \in W$
- $(\forall \lambda)(\forall \boldsymbol{u})(\forall \boldsymbol{v})(\langle \lambda, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in \mathbb{K} \otimes W \otimes W \to \boldsymbol{u} \dagger \lambda \bullet \boldsymbol{v} \in W)$

Théorème 5 (Caractérisation (2) des sous-espaces vectoriels)

Soit $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ *un corps opérant sur le groupe* $\langle V, \dagger \rangle$ *pour former un espace vectoriel de produit externe* $\bullet$.
Soit W *un sous-ensemble de* V.
W *est un sous-espace vectoriel (sev) de* V *si, et seulement si :*

- $\mathbf{0} \in W$
- $(\forall \lambda)(\forall \boldsymbol{u})(\forall \boldsymbol{v})(\langle \lambda, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in \mathbb{K} \otimes W \otimes W \to \boldsymbol{u} \dagger \lambda \bullet \boldsymbol{v} \in W)$

Théorème 5 (Caractérisation (2) des sous-espaces vectoriels)

Soit $\langle \mathbb{K}, \oplus, \odot \rangle$ un corps opérant sur le groupe $\langle V, \dagger \rangle$ pour former un espace vectoriel de produit externe $\bullet$.
Soit W un sous-ensemble de V.
W est un sous-espace vectoriel (sev) de V si, et seulement si :

- $\mathbf{0} \in W$
- $(\forall \lambda)(\forall \boldsymbol{u})(\forall \boldsymbol{v})(\langle \lambda, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in \mathbb{K} \otimes W \otimes W \rightarrow \boldsymbol{u} \dagger \lambda \bullet \boldsymbol{v} \in W)$

Sommaire

$$M \times N = N \times M = \mathbb{I}_n$$

$$N = M^{-1}$$

Exercice 1

Si A et B sont régulières et de taille n, alors comment calculer $(A \times B)^{-1}$ à partir des inverses de A et B ?

$$M \times N = N \times M = \mathbb{I}_n$$

$$N = M^{-1}$$

Exercice 1

Si A et B sont régulières et de taille n, alors comment calculer $(A \times B)^{-1}$ à partir des inverses de A et B ?

Matrices élémentaires

E_n^{ij} la matrice carrée de $\mathbb{A}^{n\times n}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui vaut $1_{\mathbb{A}}$.

$E_3^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{Z}^{3\times 3}$.

```
In [6]: Mat([3,3],lambda i,j: 1 if (i,j) == (0,1) else 0)
Out[6]:
 0  1  0
 0  0  0
 0  0  0
```

Matrices élémentaires

E_n^{ij} la matrice carrée de $\mathbb{A}^{n\times n}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui vaut $1_{\mathbb{A}}$.

$E_3^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{Z}^{3\times 3}$.

```
In [6]: Mat([3,3],lambda i,j: 1 if (i,j) == (0,1) else 0)
Out[6]:
 0  1  0
 0  0  0
 0  0  0
```

Matrices élémentaires

E_n^{ij} la matrice carrée de $\mathbb{A}^{n\times n}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui vaut $1_{\mathbb{A}}$.

$E_3^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{Z}^{3\times 3}$.

```
In [6]: Mat([3,3],lambda i,j: 1 if (i,j) == (0,1) else 0)
Out[6]:
 0  1  0
 0  0  0
 0  0  0
```

« Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk »

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \{0;1\} \\ (i,j) & \mapsto & 1 \text{ si } i=j, \ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

« Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk »

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \{0;1\} \\ (i,j) & \mapsto & 1 \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* »

$$\delta\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \{0;1\} \\ (i,j) & \mapsto & 1 \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* »

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \{0;1\} \\ (i,j) & \mapsto & 1 \text{ si } i = j,\ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Exercice 2

Étudiez le produit $E_n^{ij} \times E_n^{\ell k}$ *et exprimez-le à l'aide du symbole de* Kronecker.
Simplifiez ensuite le produit $(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij})$ *: qu'en concluez-vous ?*

Exercice 2

Étudiez le produit $E_n^{ij} \times E_n^{\ell k}$ et exprimez-le à l'aide du symbole de Kronecker.
Simplifiez ensuite le produit $(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij})$: qu'en concluez-vous ?

Exercice 2

Étudiez le produit $E_n^{ij} \times E_n^{\ell k}$ *et exprimez-le à l'aide du symbole de* Kronecker. *Simplifiez ensuite le produit* $(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij})$ *: qu'en concluez-vous ?*

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{rcl} \mathbb{A}^{n\times p} & \to & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \mapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 3

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n\times p} & \to & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \mapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 3

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n\times p} & \to & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \mapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 3

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{rcl} \mathbb{A}^{n\times p} & \to & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \mapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 3

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{rcl} \mathbb{A}^{n\times p} & \to & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \mapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 3

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Dilatations de lignes

$$L_i \leftarrow \lambda \boxdot L_i$$

$$\Delta_n^{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda \boxplus (-1_{\mathbb{A}}))E_n^{ii}$$

$$\Delta_3^{2,\lambda} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Dilatations de lignes

$$L_i \leftarrow \lambda \boxdot L_i$$

$$\Delta_n^{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda \boxplus (-1_{\mathbb{A}}))E_n^{ii}$$

$$\Delta_3^{2,\lambda} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Dilatations de lignes

$$L_i \leftarrow \lambda \boxdot L_i$$

$$\Delta_n^{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda \boxplus (-1_{\mathbb{A}}))E_n^{ii}$$

$$\Delta_3^{2,\lambda} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 4

Que vaut le produit de S_3^{23} *par* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ *?*

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 4

Que vaut le produit de S_3^{23} par $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$?

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 4

Que vaut le produit de S_3^{23} *par* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ *?*

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 4

Que vaut le produit de S_3^{23} par $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$?

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

```
In [7]: M = list2mat([[11,12,13],[21,22,23],[31,32,33]])

In [8]: M
Out[8]:
 11  12  13
 21  22  23
 31  32  33

In [9]: M.swap(2,0)
Out[9]:
 31  32  33
 21  22  23
 11  12  13
```

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$: $\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto \left(F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1\right) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto \left(F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}\right) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi\left(\mathbb{I}_n\right)$: $\varphi^{-1}\left(\mathbb{I}_n\right)$.

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$: $\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$:$\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Théorème 6

φ étant une opération élémentaire sur les lignes,

$$M \text{ inversible} \leftrightarrow \varphi(M) \text{ inversible}$$

Théorème 7

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ est une suite d'opérations sur les lignes de M qui transfome M en $\mathbb{I}_n$ alors M est inversible et

$$M^{-1} = \varphi_k(\mathbb{I}_n) \times \varphi_{k-1}(\mathbb{I}_n) \times \ldots \times \varphi_1(\mathbb{I}_n) = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(\mathbb{I}_n)$$

Théorème 6

φ étant une opération élémentaire sur les lignes,

$$M \text{ inversible} \leftrightarrow \varphi(M) \text{ inversible}$$

Théorème 7

Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ est une suite d'opérations sur les lignes de M qui transforme M en $\mathbb{I}_n$ alors M est inversible et

$$M^{-1} = \varphi_k(\mathbb{I}_n) \times \varphi_{k-1}(\mathbb{I}_n) \times \dots \times \varphi_1(\mathbb{I}_n) = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \dots \circ \varphi_1(\mathbb{I}_n)$$

Théorème 6

φ étant une opération élémentaire sur les lignes,

$$M \text{ inversible} \leftrightarrow \varphi(M) \text{ inversible}$$

Théorème 7

Si $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ est une suite d'opérations sur les lignes de M qui transforme M en $\mathbb{I}_n$ alors M est inversible et

$$M^{-1} = \varphi_k(\mathbb{I}_n) \times \varphi_{k-1}(\mathbb{I}_n) \times .... \times \varphi_1(\mathbb{I}_n) = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ ... \circ \varphi_1(\mathbb{I}_n)$$

Sommaire

$$M \overset{\ell}{\equiv} N \leftrightarrow N = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(M)$$

opérations φ	Partie gauche	Partie droite	Remarques
	M	$\mathbb{I}_n$	initialisation du tableau
φ_1	M_1	R_1	$M_1 = \varphi_1(M),\ R_1 = \varphi_1(\mathbb{I}_n)$
φ_2	M_2	R_2	$M_2 = \varphi_2(M_1),\ R_2 = \varphi_2(R_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_i	M_i	R_i	$M_i = R_i \times M$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_k	N	R	$N = R \times M$

$$M \overset{\ell}{\equiv} N \leftrightarrow N = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(M)$$

opérations φ	Partie gauche	Partie droite	Remarques
	M	$\mathbb{I}_n$	initialisation du tableau
φ_1	M_1	R_1	$M_1 = \varphi_1(M),\ R_1 = \varphi_1(\mathbb{I}_n)$
φ_2	M_2	R_2	$M_2 = \varphi_2(M_1),\ R_2 = \varphi_2(R_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_i	M_i	R_i	$M_i = R_i \times M$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_k	N	R	$N = R \times M$

L réduite échelonnée

1. Toutes les lignes nulles (une ligne est nulle si elle ne comporte que des zéros) sont au-dessous des lignes non nulles.
2. Dans chaque ligne non nulle le premier élément non nul est $1_{\mathbb{A}}$ (on lit une ligne de la gauche vers la droite), ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelé **pivot** ou élément pivot. La colonne où se trouve ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelée colonne pivot et c'est le seul élément non nul de cette colonne.
3. Si, **de plus**, les pivots apparaissent en ordre croissant par numéro de ligne **et** numéro de colonne, on dit que M est **ℓ-réduite échelonnée** (en abrégé lré ou LRé).

L réduite échelonnée

1. Toutes les lignes nulles (une ligne est nulle si elle ne comporte que des zéros) sont au-dessous des lignes non nulles.
2. Dans chaque ligne non nulle le premier élément non nul est $1_{\mathbb{A}}$ (on lit une ligne de la gauche vers la droite), ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelé **pivot** ou élément pivot. La colonne où se trouve ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelée colonne pivot et c'est le seul élément non nul de cette colonne.
3. Si, **de plus**, les pivots apparaissent en ordre croissant par numéro de ligne **et** numéro de colonne, on dit que M est **ℓ-réduite échelonnée** (en abrégé lré ou LRé).

L réduite échelonnée

1. Toutes les lignes nulles (une ligne est nulle si elle ne comporte que des zéros) sont au-dessous des lignes non nulles.
2. Dans chaque ligne non nulle le premier élément non nul est $1_{\mathbb{A}}$ (on lit une ligne de la gauche vers la droite), ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelé **pivot** ou élément pivot. La colonne où se trouve ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelée colonne pivot et c'est le seul élément non nul de cette colonne.
3. Si, **de plus**, les pivots apparaissent en ordre croissant par numéro de ligne **et** numéro de colonne, on dit que M est **ℓ-réduite échelonnée** (en abrégé lré ou LRé).

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est ℓ-réduite non échelonnée

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$ n'est pas ℓ-réduite

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est ℓ-réduite échelonnée

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_4 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 9 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_5 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 9 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_6 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Sommaire

Définition 8 (matrice de passage)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{e_1'} & \overrightarrow{e_2'} & \overrightarrow{e_3'} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

Définition 8 (matrice de passage)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{e_1'} & \overrightarrow{e_2'} & \overrightarrow{e_3'} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

Définition 8 (matrice de passage)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{e'_1} & \overrightarrow{e'_2} & \overrightarrow{e'_3} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur : $V = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons maintenant $V' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \overrightarrow{v}$ alors :

Théorème 9 (changement de coordonnées d'un vecteur)

$$V = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

Preuve...

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur : $V = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons maintenant $V' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \overrightarrow{v}$ alors :

Théorème 9 (changement de coordonnées d'un vecteur)

$$V = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

Preuve...

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur : $V = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons maintenant $V' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \overrightarrow{v}$ alors :

Théorème 9 (changement de coordonnées d'un vecteur)

$$V = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

Preuve...

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur : $V = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons maintenant $V' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \overrightarrow{v}$ alors :

Théorème 9 (changement de coordonnées d'un vecteur)

$$V = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

Preuve...

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur : $V = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons maintenant $V' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \overrightarrow{v}$ alors :

Théorème 9 (changement de coordonnées d'un vecteur)

$$V = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times V'$$

Preuve...

$$V' = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \times V$$

Sommaire

Bases

x un vecteur dans E de base $\mathcal{B}$

φ un morphisme de E dans F avec F de base $\mathcal{B}'$.

$\varphi(x) =$

Matrice ?

Bases

x un vecteur dans E de base $\mathcal{B}$

φ un morphisme de E dans F avec F de base $\mathcal{B}'$.

$\varphi(x) =$

Matrice ?

Bases

x un vecteur dans E de base $\mathcal{B}$

φ un morphisme de E dans F avec F de base $\mathcal{B}'$.

$\varphi(x) =$

Matrice ?

Bases

x un vecteur dans E de base $\mathcal{B}$

φ un morphisme de E dans F avec F de base $\mathcal{B}'$.

$\varphi(x) =$

Matrice ?

Bases

x un vecteur dans E de base $\mathcal{B}$

φ un morphisme de E dans F avec F de base $\mathcal{B}'$.

$\varphi(x) =$

Matrice ?

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \end{array}$$

Changement de base ?

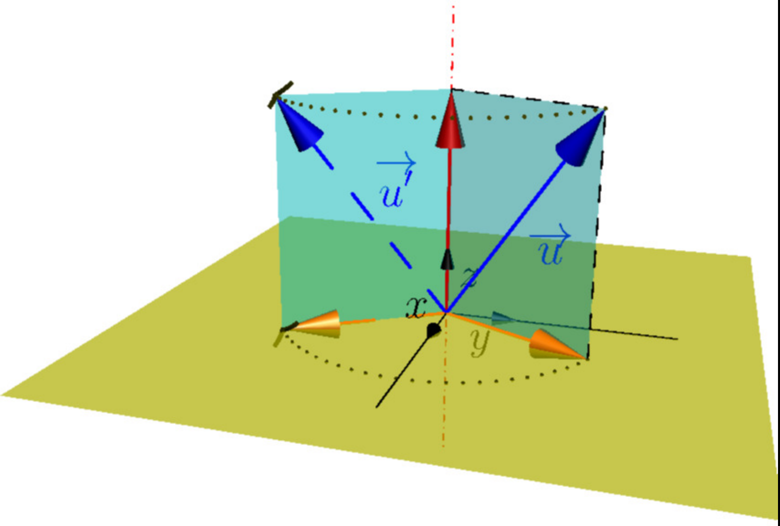
$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathcal{B}\ E \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}"'] & F\ \mathcal{B} \arrow[d, "\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}"] \\
\mathcal{B}'\ E \arrow[r, "f", "\color{yellow}{A'}"'] & F\ \mathcal{B}'
\end{tikzcd}
$$

Noyau

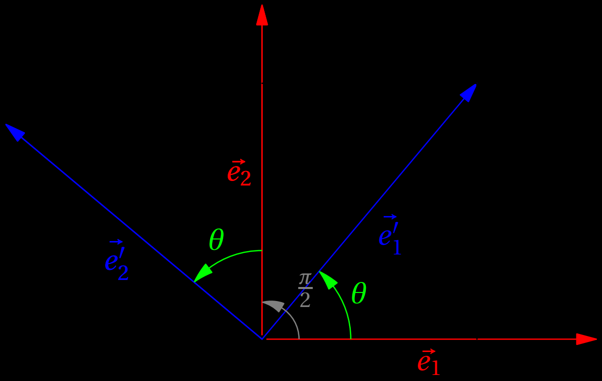
Image

Noyau
Image

Sommaire



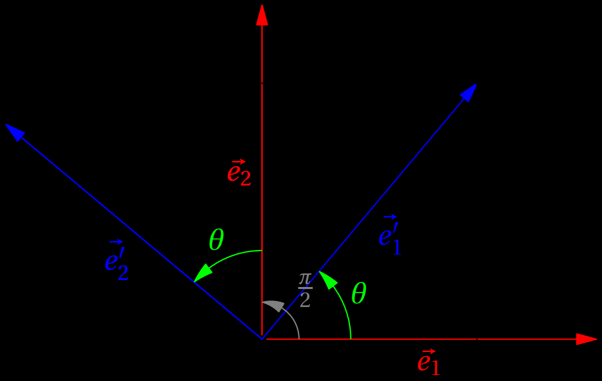
Rotation d'un vecteur



Projection orthogonale de la rotation d'un vecteur

$$\overrightarrow{e'_1} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e'_2} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_1} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_2} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_2}$$



Projection orthogonale de la rotation d'un vecteur

$$\overrightarrow{e'_1} = \cos\theta\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\overrightarrow{e_2}$$
$$\overrightarrow{e'_2} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_1} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_2} = -\sin\theta\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\overrightarrow{e_2}$$

$$\begin{array}{cccc} r\left(\overrightarrow{e_1}\right) & r\left(\overrightarrow{e_2}\right) & r\left(\overrightarrow{e_3}\right) & \\ \left(\begin{matrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{matrix} \end{array}$$