Mathématiques discrètes VI
Calcul matriciel

INFO2 - Semaines 43 à 2

Guillaume CONNAN

IUT de Nantes - Dpt d'informatique

Dernière mise à jour : 6 novembre 2012

Sommaire

Sommaire

方程


DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
DG5533672Z4
$f(x)$
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

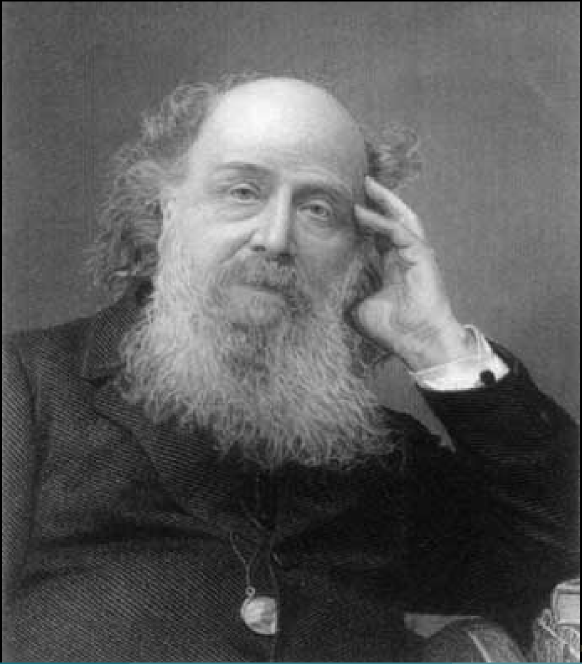
Wilhelm Jordan

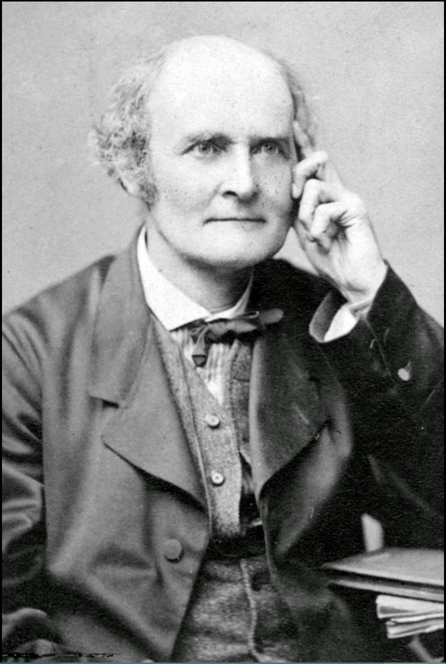
geb. am 01.03.1842 in Ellwangen
gest. am 17.04.1899 in Hannover

Professor der praktischen Geometrie und höheren Geodäsie an der Polytechnischen Schule in Karlsruhe
Professor der Geodäsie und praktischen Geometrie an der TH Hannover

Arbeiten zur europäischen Gradmessung
Mitglied der Kaiserlichen Normal-Eichungskommision
Durchführung der Triangulation der Städte Hannover und Linden

1882 - 1899 Professor der Geodäsie und praktischen Geometrie an der TH Hannover





Sommaire

Nous appellerons *vecteur* une liste d'éléments d'un ensemble $\mathbb{A}$. Cet ensemble $\mathbb{A}$ est muni de deux opérations, $\boxplus$ et $\boxdot$, qui lui confèrent une structure d'**anneau** :

- $(\mathbb{A}, \boxplus)$ a une structure de groupe commutatif ;
- $(\mathbb{A}, \boxdot)$ a une structure de monoïde ;
- $\boxdot$ est distributive sur $\boxplus$.

On désigne souvent par $0_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxplus$ et par $1_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxdot$.
$(\mathbb{A}, \boxdot)$ n'étant pas forcément un groupe, tout le monde n'admet pas forcément un inverse par $\boxdot$.

Nous appellerons *vecteur* une liste d'éléments d'un ensemble $\mathbb{A}$. Cet ensemble $\mathbb{A}$ est muni de deux opérations, $\boxplus$ et $\boxdot$, qui lui confèrent une structure d'**anneau** :

- $(\mathbb{A}, \boxplus)$ a une structure de groupe commutatif ;
- $(\mathbb{A}, \boxdot)$ a une structure de monoïde ;
- $\boxdot$ est distributive sur $\boxplus$.

On désigne souvent par $0_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxplus$ et par $1_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxdot$.
$(\mathbb{A}, \boxdot)$ n'étant pas forcément un groupe, tout le monde n'admet pas forcément un inverse par $\boxdot$.

Nous appellerons *vecteur* une liste d'éléments d'un ensemble $\mathbb{A}$. Cet ensemble $\mathbb{A}$ est muni de deux opérations, $\boxplus$ et $\boxdot$, qui lui confèrent une structure d'**anneau** :

- $(\mathbb{A},\boxplus)$ a une structure de groupe commutatif ;
- $(\mathbb{A},\boxdot)$ a une structure de monoïde ;
- $\boxdot$ est distributive sur $\boxplus$.

On désigne souvent par $0_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxplus$ et par $1_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxdot$.
$(\mathbb{A},\boxdot)$ n'étant pas forcément un groupe, tout le monde n'admet pas forcément un inverse par $\boxdot$.

Nous appellerons *vecteur* une liste d'éléments d'un ensemble $\mathbb{A}$. Cet ensemble $\mathbb{A}$ est muni de deux opérations, $\boxplus$ et $\boxdot$, qui lui confèrent une structure d'**anneau** :

- $(\mathbb{A}, \boxplus)$ a une structure de groupe commutatif ;
- $(\mathbb{A}, \boxdot)$ a une structure de monoïde ;
- $\boxdot$ est distributive sur $\boxplus$.

On désigne souvent par $0_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxplus$ et par $1_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxdot$.

$(\mathbb{A}, \boxdot)$ n'étant pas forcément un groupe, tout le monde n'admet pas forcément un inverse par $\boxdot$.

Nous appellerons *vecteur* une liste d'éléments d'un ensemble $\mathbb{A}$. Cet ensemble $\mathbb{A}$ est muni de deux opérations, $\boxplus$ et $\boxdot$, qui lui confèrent une structure d'**anneau** :

- $(\mathbb{A}, \boxplus)$ a une structure de groupe commutatif ;
- $(\mathbb{A}, \boxdot)$ a une structure de monoïde ;
- $\boxdot$ est distributive sur $\boxplus$.

On désigne souvent par $0_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxplus$ et par $1_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxdot$.
$(\mathbb{A}, \boxdot)$ n'étant pas forcément un groupe, tout le monde n'admet pas forcément un inverse par $\boxdot$.

Nous appellerons *vecteur* une liste d'éléments d'un ensemble $\mathbb{A}$. Cet ensemble $\mathbb{A}$ est muni de deux opérations, $\boxplus$ et $\boxdot$, qui lui confèrent une structure d'**anneau** :

- $(\mathbb{A}, \boxplus)$ a une structure de groupe commutatif ;
- $(\mathbb{A}, \boxdot)$ a une structure de monoïde ;
- $\boxdot$ est distributive sur $\boxplus$.

On désigne souvent par $0_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxplus$ et par $1_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxdot$.

$(\mathbb{A}, \boxdot)$ n'étant pas forcément un groupe, tout le monde n'admet pas forcément un inverse par $\boxdot$.

Nous appellerons *vecteur* une liste d'éléments d'un ensemble $\mathbb{A}$. Cet ensemble $\mathbb{A}$ est muni de deux opérations, $\boxplus$ et $\boxdot$, qui lui confèrent une structure d'**anneau** :

- $(\mathbb{A}, \boxplus)$ a une structure de groupe commutatif ;
- $(\mathbb{A}, \boxdot)$ a une structure de monoïde ;
- $\boxdot$ est distributive sur $\boxplus$.

On désigne souvent par $0_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxplus$ et par $1_{\mathbb{A}}$ l'élément neutre de $\boxdot$.
$(\mathbb{A}, \boxdot)$ n'étant pas forcément un groupe, tout le monde n'admet pas forcément un inverse par $\boxdot$.

Exercice 1

Quels sont les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}, \cdot)$?

```
type 'a anneau =
  {zero      : 'a;
   un        : 'a;
   som       : 'a -> 'a -> 'a;
   prod      : 'a -> 'a -> 'a;
   sous      : 'a -> 'a -> 'a;
   div       : 'a -> 'a -> 'a;
   to_string : 'a -> string;
   egal      : 'a -> 'a -> bool;
   ordre     : 'a -> 'a -> bool;
  };;
```

```
let reel =
  {zero      = 0.;
   un        = 1.;
   som       = ( +. );
   prod      = ( *. );
   sous      = ( -. );
   to_string = string_of_float;
   div       = ( /. );
   egal      = (=);
   ordre     = (>=);
  };;
```

On notera $\mathbb{A}^p$ l'ensemble des vecteurs à coefficients dans $\mathbb{A}$ de *taille* p.

On notera $\mathbb{A}^p$ l'ensemble des vecteurs à coefficients dans $\mathbb{A}$ de *taille* p.

$$u \boxplus v = [a_1 \boxplus b_1, a_2 \boxplus b_2, \ldots, a_n \boxplus b_n]$$

$$ku = [k \boxdot a_1, k \boxdot a_2, \ldots, k \boxdot a_p]$$

$$u \boxdot v = [a_1 \boxdot b_1, a_2 \boxdot b_2, \ldots, a_p \boxdot b_p]$$

On notera $\mathbb{A}^p$ l'ensemble des vecteurs à coefficients dans $\mathbb{A}$ de *taille* p.

$$u \boxplus v = [a_1 \boxplus b_1, a_2 \boxplus b_2, ..., a_n \boxplus b_n]$$

$$ku = [k \boxdot a_1, k \boxdot a_2, ..., k \boxdot a_p]$$

$$u \boxdot v = [a_1 \boxdot b_1, a_2 \boxdot b_2, ..., a_p \boxdot b_p]$$

On notera $\mathbb{A}^p$ l'ensemble des vecteurs à coefficients dans $\mathbb{A}$ de *taille* p.

$$u \boxplus v = [a_1 \boxplus b_1, a_2 \boxplus b_2, ..., a_n \boxplus b_n]$$

$$ku = [k \boxdot a_1, k \boxdot a_2, ..., k \boxdot a_p]$$

$$u \boxdot v = [a_1 \boxdot b_1, a_2 \boxdot b_2, ..., a_p \boxdot b_p]$$

On notera $\mathbb{A}^p$ l'ensemble des vecteurs à coefficients dans $\mathbb{A}$ de *taille* p.

$$u \boxplus v = [a_1 \boxplus b_1, a_2 \boxplus b_2, ..., a_n \boxplus b_n]$$

$$ku = [k \boxdot a_1, k \boxdot a_2, ..., k \boxdot a_p]$$

$$u \boxdot v = [a_1 \boxdot b_1, a_2 \boxdot b_2, ..., a_p \boxdot b_p]$$

```
val map : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
     List.map f [a1; ...; an] applies function f to a1, ..., an,
     and builds the list [f a1; ...; f an] with the results
     returned by f. Not tail-recursive.

val mapi : (int -> 'a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
     Same as List.map, but the function is applied to the index of
     the element as first argument (counting from 0), and the elemen
     itself as second argument. Not tail-recursive.
```

```
let map_vec = fun op vec ->
  map (fun x -> op x) vec;;

let vecs_op = fun op v1 v2 ->
    mapi ( fun i x -> op (nth v1 i) x ) v2;;
```

```
val map : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
     List.map f [a1; ...; an] applies function f to a1, ..., an,
     and builds the list [f a1; ...; f an] with the results
     returned by f. Not tail-recursive.

val mapi : (int -> 'a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
     Same as List.map, but the function is applied to the index of
     the element as first argument (counting from 0), and the elemen
     itself as second argument. Not tail-recursive.
```

```
let map_vec = fun op vec ->
  map (fun x -> op x) vec;;

let vecs_op = fun op v1 v2 ->
    mapi ( fun i x -> op (nth v1 i) x ) v2;;
```

Sommaire

$\mathbb{A}^{n \times p}$: ensemble des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{A}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{1,1}} & \phantom{a_{1,2}} & & j & & \phantom{a_{1,p}} \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathbb{A}^{n\times p}$: ensemble des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{A}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{1,1}} & \phantom{a_{1,2}} & & j & & \phantom{a_{1,p}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

```
let mats_op = fun op m1 m2 ->
  vecs_op (vecs_op op) m1 m2;;

let rec make_vec long x =
  match long with
   |0 -> []
   |_ -> x::(make_vec (long-1) x);;

let rec make_mat row col x =
  match row with
   |0 -> []
   |_ -> (make_vec col x)::(make_mat (row -1) col x);;
```

Sommaire

$$S_{ij} = A_{ij} \boxplus N_{ij}$$

$$P_{ij} = k \boxdot M_{ij}$$

$$S_{ij} = A_{ij} \boxplus N_{ij}$$

$$P_{ij} = k \boxdot M_{ij}$$

$$p_{ij} = \mathop{\boxplus}\limits_{k=1}^{m} a_{ik} \boxdot b_{kj}$$

B : 3 lignes 5 colonnes

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \end{pmatrix}$$

A : 4 lignes 3 colonnes

$P = A \times B$: 4 lignes 5 colonnes

```
# let a = [[1;2;3];[4;5;6]];;
val a : int list list = [[1; 2; 3]; [4; 5; 6]]
# printm entier a;;
 |     1      2      3  |
 |     4      5      6  |

# let b = [[0;10;20;30];[-10;0;10;20];[-20;-10;0;10]];;
val b : int list list =
  [[0; 10; 20; 30]; [-10; 0; 10; 20]; [-20; -10; 0; 10]]
# printm entier b;;
 |     0     10     20     30  |
 |   -10      0     10     20  |
 |   -20    -10      0     10  |

# printm entier (prod_mat entier a b);;
 |   -80    -20     40    100  |
 |  -170    -20    130    280  |
```

Exercice 2

Montrez que $(\mathbb{A}^{n\times n}, +, \times)$ *est un anneau. Est-il commutatif ?*
On notera $\mathbb{I}_n$ *l'élément neutre de* $(\mathbb{A}^{n\times n}, \times)$ *: quelle est sa tête ?*

$$T_{ij} = A_{ji}$$

```
# printm entier a;;
 |      1       2       3   |
 |      4       5       6   |
- : unit = ()
# printm entier (transpose a);;
 |      1       4   |
 |      2       5   |
 |      3       6   |
- : unit = ()
```

$$T_{ij} = A_{ji}$$

```
# printm entier a;;
 |     1       2       3  |
 |     4       5       6  |
- : unit = ()
# printm entier (transpose a);;
 |     1       4  |
 |     2       5  |
 |     3       6  |
- : unit = ()
```

Exercice 3

Démontrez que ${}^t(A \times B) = {}^tA \times {}^tB$.

Sommaire

$$M \times N = N \times M = \mathbb{I}_n$$

$$N = M^{-1}$$

Exercice 4

Si A et B sont régulières et de taille n, alors comment calculer $(A \times B)^{-1}$ à partir des inverses de A te B ?

$$M \times N = N \times M = \mathbb{I}_n$$

$$N = M^{-1}$$

Exercice 4

Si A et B sont régulières et de taille n, alors comment calculer $(A \times B)^{-1}$ à partir des inverses de A te B ?

Sommaire

Matrices élémentaires

E_n^{ij} la matrice carrée de $\mathbb{A}^{n\times n}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui vaut $1_{\mathbb{A}}$.

$E_3^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{Z}^{3\times 3}$.

```
# printm entier (elem entier 2 3 4);;
  |      0      0      0      0   |
  |      0      0      0      0   |
  |      0      0      0      1   |
  |      0      0      0      0   |
```

Matrices élémentaires

E_n^{ij} la matrice carrée de $\mathbb{A}^{n\times n}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui vaut $1_{\mathbb{A}}$.

$E_3^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{Z}^{3\times 3}$.

```
# printm entier (elem entier 2 3 4);;
 |     0     0     0     0  |
 |     0     0     0     0  |
 |     0     0     0     1  |
 |     0     0     0     0  |
```

Matrices élémentaires

E_n^{ij} la matrice carrée de $\mathbb{A}^{n\times n}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui vaut $1_{\mathbb{A}}$.

$E_3^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{Z}^{3\times 3}$.

```
# printm entier (elem entier 2 3 4);;
 |      0      0      0      0   |
 |      0      0      0      0   |
 |      0      0      0      1   |
 |      0      0      0      0   |
```

« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* »

$$\delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \{0;1\} \\ (i,j) & \mapsto & 1 \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* »

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \{0;1\} \\ (i,j) & \mapsto & 1 \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* »

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \{0;1\} \\ (i,j) & \longmapsto & 1 \text{ si } i = j, \; 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\mathbb{I}_n = \left(\delta_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* »

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \{0;1\} \\ (i,j) & \longmapsto & 1 \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

Exercice 5

Étudiez le produit $E_n^{ij} \times E_n^{\ell k}$ et exprimez-le à l'aide du symbole de Kronecker.

Simplifiez ensuite le produit $(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij})$: qu'en concluez-vous ?

Exercice 5

Étudiez le produit $E_n^{ij} \times E_n^{\ell k}$ *et exprimez-le à l'aide du symbole de* Kronecker.
Simplifiez ensuite le produit $(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij})$ *: qu'en concluez-vous ?*

Exercice 5

Étudiez le produit $E_n^{ij} \times E_n^{\ell k}$ *et exprimez-le à l'aide du symbole de* Kronecker.
Simplifiez ensuite le produit $(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij})$ *: qu'en concluez-vous ?*

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n\times p} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \longmapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 6

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{rcl} \mathbb{A}^{n\times p} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \longmapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 6

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n\times p} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \longmapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 6

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{rcl} \mathbb{A}^{n\times p} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \longmapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 6

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{rcl} \mathbb{A}^{n\times p} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \longmapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 6

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

```
# printm entier (transvec entier 0 3 (-2) (unite entier 4));;
```

```
|    1    0    0   -2 |
|    0    1    0    0 |
|    0    0    1    0 |
|    0    0    0    1 |
```

```
# printm entier (transvec entier 0 3 (-2) (unite entier 4));;
```

```
|     1       0       0      -2  |
|     0       1       0       0  |
|     0       0       1       0  |
|     0       0       0       1  |
```

Dilatations de lignes

$$L_i \leftarrow \lambda \boxdot L_i$$

$$\Delta_n^{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda \boxplus (-1_{\mathbb{A}}))E_n^{ii}$$

$$\Delta_3^{2,\lambda} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

```
# printm entier (dilat entier 1 7 (attila entier (3,4)));;
 |      1       1       1       1  |
 |      7       7       7       7  |
 |      1       1       1       1  |
```

Dilatations de lignes

$$L_i \leftarrow \lambda \boxdot L_i$$

$$\Delta_n^{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + \left(\lambda \boxplus (-1_{\mathbb{A}})\right) E_n^{ii}$$

$$\Delta_3^{2,\lambda} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

```
# printm entier (dilat entier 1 7 (attila entier (3,4)));;
 |     1     1     1     1  |
 |     7     7     7     7  |
 |     1     1     1     1  |
```

Dilatations de lignes

$$L_i \leftarrow \lambda \boxdot L_i$$

$$\Delta_n^{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda \boxplus (-1_{\mathbb{A}}))E_n^{ii}$$

$$\Delta_3^{2,\lambda} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

```
# printm entier (dilat entier 1 7 (attila entier (3,4)));;
 |     1     1     1     1  |
 |     7     7     7     7  |
 |     1     1     1     1  |
```

Dilatations de lignes

$$L_i \leftarrow \lambda \boxdot L_i$$

$$\Delta_n^{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda \boxplus (-1_{\mathbb{A}}))E_n^{ii}$$

$$\Delta_3^{2,\lambda} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

```
# printm entier (dilat entier 1 7 (attila entier (3,4)));;
 |     1       1       1       1   |
 |     7       7       7       7   |
 |     1       1       1       1   |
```

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 7

Que vaut le produit de S_3^{23} *par* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$?

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

```
# printm entier (swap entier 0 1 [[11;12;13];[21;22;23];[31;32;33]])
    ;;
  |    21      22      23   |
  |    11      12      13   |
  |    31      32      33   |
```

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 7

Que vaut le produit de S_3^{23} *par* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$?

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

```
# printm entier (swap entier 0 1 [[11;12;13];[21;22;23];[31;32;33]])
    ;;
 |    21       22       23   |
 |    11       12       13   |
 |    31       32       33   |
```

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 7

Que vaut le produit de S_3^{23} *par* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ *?*

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

```
# printm entier (swap entier 0 1 [[11;12;13];[21;22;23];[31;32;33]])
    ;;
 |    21      22      23   |
 |    11      12      13   |
 |    31      32      33   |
```

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 7

Que vaut le produit de S_3^{23} *par* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ *?*

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

```
# printm entier (swap entier 0 1 [[11;12;13];[21;22;23];[31;32;33]])
    ;;
 |    21      22      23   |
 |    11      12      13   |
 |    31      32      33   |
```

Sommaire

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$:$\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$: $\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$: $\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$:$\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Théorème 1

φ *étant une opération élémentaire sur les lignes,*

$$M \text{ inversible} \leftrightarrow \varphi(M) \text{ inversible}$$

Théorème 2

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \varphi_k$ *est une suite d'opérations sur les lignes de* M *qui transforme* M *en* $\mathbb{I}_n$ *alors* M *est inversible et*

$$M^{-1} = \varphi_k(\mathbb{I}_n) \times \varphi_{k-1}(\mathbb{I}_n) \times \ldots \times \varphi_1(\mathbb{I}_n) = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(\mathbb{I}_n)$$

Théorème 1

φ *étant une opération élémentaire sur les lignes,*

$$M \text{ inversible} \leftrightarrow \varphi(M) \text{ inversible}$$

Théorème 2

Si $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ *est une suite d'opérations sur les lignes de* M *qui transforme* M *en* $\mathbb{I}_n$ *alors* M *est inversible et*

$$M^{-1} = \varphi_k(\mathbb{I}_n) \times \varphi_{k-1}(\mathbb{I}_n) \times .... \times \varphi_1(\mathbb{I}_n) = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ ... \circ \varphi_1(\mathbb{I}_n)$$

Théorème 1

φ étant une opération élémentaire sur les lignes,

$$M \text{ inversible} \leftrightarrow \varphi(M) \text{ inversible}$$

Théorème 2

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots., \varphi_k$ est une suite d'opérations sur les lignes de M qui transforme M en $\mathbb{I}_n$ alors M est inversible et

$$M^{-1} = \varphi_k(\mathbb{I}_n) \times \varphi_{k-1}(\mathbb{I}_n) \times \ldots. \times \varphi_1(\mathbb{I}_n) = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(\mathbb{I}_n)$$

Sommaire

Sommaire

$$M \overset{\ell}{\equiv} N \leftrightarrow N = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(M)$$

opérations φ	Partie gauche	Partie droite	Remarques
	M	$\mathbb{I}_n$	initialisation du tableau
φ_1	M_1	R_1	$M_1 = \varphi_1(M)$, $R_1 = \varphi_1(\mathbb{I}_n)$
φ_2	M_2	R_2	$M_2 = \varphi_2(M_1)$, $R_2 = \varphi_2(R_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_i	M_i	R_i	$M_i = R_i \times M$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_k	N	R	$N = R \times M$

$$M \overset{\ell}{\equiv} N \leftrightarrow N = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(M)$$

opérations φ	Partie gauche	Partie droite	Remarques
	M	$\mathbb{I}_n$	initialisation du tableau
φ_1	M_1	R_1	$M_1 = \varphi_1(M)$, $R_1 = \varphi_1(\mathbb{I}_n)$
φ_2	M_2	R_2	$M_2 = \varphi_2(M_1)$, $R_2 = \varphi_2(R_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_i	M_i	R_i	$M_i = R_i \times M$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_k	N	R	$N = R \times M$

Sommaire

L réduite échelonnée

1. Toutes les lignes nulles (une ligne est nulle si elle ne comporte que des zéros) sont au-dessous des lignes non nulles.
2. Dans chaque ligne non nulle le premier élément non nul est $1_{\mathbb{A}}$ (on lit une ligne de la gauche vers la droite), ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelé **pivot** ou élément pivot. La colonne où se trouve ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelée colonne pivot et c'est le seul élément non nul de cette colonne.
3. Si, **de plus**, les pivots apparaissent en ordre croissant par numéro de ligne **et** numéro de colonne, on dit que M est **ℓ-réduite échelonnée** (en abrégé lré ou LRé).

L réduite échelonnée

1. Toutes les lignes nulles (une ligne est nulle si elle ne comporte que des zéros) sont au-dessous des lignes non nulles.
2. Dans chaque ligne non nulle le premier élément non nul est $1_{\mathbb{A}}$ (on lit une ligne de la gauche vers la droite), ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelé **pivot** ou élément pivot. La colonne où se trouve ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelée colonne pivot et c'est le seul élément non nul de cette colonne.
3. Si, **de plus**, les pivots apparaissent en ordre croissant par numéro de ligne **et** numéro de colonne, on dit que M est **ℓ-réduite échelonnée** (en abrégé lré ou LRé).

L réduite échelonnée

1. Toutes les lignes nulles (une ligne est nulle si elle ne comporte que des zéros) sont au-dessous des lignes non nulles.
2. Dans chaque ligne non nulle le premier élément non nul est $1_{\mathbb{A}}$ (on lit une ligne de la gauche vers la droite), ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelé **pivot** ou élément pivot. La colonne où se trouve ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelée colonne pivot et c'est le seul élément non nul de cette colonne.
3. Si, **de plus**, les pivots apparaissent en ordre croissant par numéro de ligne **et** numéro de colonne, on dit que M est **ℓ-réduite échelonnée** (en abrégé lré ou LRé).

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est ℓ-réduite non échelonnée

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$ n'est pas ℓ-réduite

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est ℓ-réduite échelonnée