APPROXIMATION D'INTÉGRALES
Méthodes des rectangles et des trapèzes

Compétences mathématiques :

• Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Calcul de l'aire d'un rectangle et d'un trapèze, calcul de sommes discrètes...

Compétences informatiques :

• Calcul de somme. Tracé d'approximations d'aires. Calcul d'intégrale. Valeurs approchées. Procédures élémentaires.

Partie 1: Méthode des rectangles

Le problème

On cherche à obtenir une approximation de l'aire sous une courbe à l'aide de rectangles. On compare avec le résultat exact. On trace la courbe et les rectangles.

1. Calcul de $\int_0^1 x^2 \, \mathbf{d}x$

a. Regardez ce qu'affiche :

```
plotarea(x^2,x=0..1,10,rectangle_droit)
```

b. Calculez « à la main » l'aire totale de ces rectangles.

c. Exprimez ce résultat à l'aide du symbole $\sum$.

d. Vérifiez votre résultat à l'aide de la fonction **XCAS** `somme(expression(k),k=début..fin)`.

e. Au lieu de s'arrêter à 10, allons voir jusqu'à un `n` quelconque. Essayez de factoriser au maximum l'expression trouvée en ne laissant apparaître que des « k » sous le symbole $\sum$.

f. Que vous inspire :

```
S(n):=(1/n^3)*somme(k^2,k=0..n-1);
simplifier(S(n));
```

g. Calculez la limite de l'expression précédente quand n tend vers $+\infty$: des remarques ?

h. Vérifiez votre résultat avec :

```
limite(S(n),n=+infinity)
```

2. Cas général

Nous voulons que **XCAS** nous affiche les petits rectangles avec `plotarea` ainsi que l'approximation du calcul de la somme des aires des rectangles que nous comparerons avec le *véritable* résultat. Pour cela, nous aurons besoin de la fonction `evalf(nombre)` qui donne une approximation d'un nombre et de `int(f(x),x=a..b)` qui calcule $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Voici une procédure qui, lorsqu'on entre la fonction à étudier, le nombre de subdivisions, les bornes de l'intervalle renvoie ce que l'on veut :

```
aireRec(f,a,b,N):={
print(evalf(somme((b-a)/N*f(a+k*(b-a)/N),k=0..N-1)),evalf(int(f(x),x=a..b)));
plotarea(f(x),x=a..b,N,rectangle_droit)
}:;
```

Faites un premier essai :

```
aireRec(x->x^2,0,1,10)
```

puis faites varier le nombre de rectangles : 100, 10000,...

Partie 2: Méthode des trapèzes

1. Rappelez la formule donnant l'aire d'un trapèze...

2. Observez :

```
couleur(plotarea(x^3,x=0..1,3,trapeze),vert+rempli),graphe(x^3,x=0..1,color=rouge+
    epaisseur_ligne_3)
```

3. Reprenez alors ce qui a été fait avec les rectangles avec cette nouvelle méthode.

Partie 3: Comparaison des deux méthodes

Quel nombre bien connu se cache derrière $\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$?
Utilisez chacune des deux méthodes précédentes pour en donner une approximation. Commentez.