NUM3ERS

Comprendre comment ça marche...

Guillaume CONNAN

Lycée Notre-Dame - $2^{nde}5$

septembre 2018

Sommaire

Et les 2nde5 créèrent les nombres
- Arbre de calcul
- Identités remarquables
- Opposé – Inverse : la recherche du neutre
- Équations : la recherche de l'équilibre

Puissances
- Et l'être humain créa la multiplication

Sommaire

Et les 2nde5 créèrent les nombres
- Arbre de calcul
- Identités remarquables
- Opposé – Inverse : la recherche du neutre
- Équations : la recherche de l'équilibre

Puissances
- Et l'être humain créa la multiplication

Sommaire

Et les 2nde5 créèrent les nombres
Arbre de calcul
Identités remarquables
Opposé - Inverse : la recherche du neutre
Équations : la recherche de l'équilibre
Puissances
Et l'être humain créa la multiplication

$$9/2 + (-3) \times 4 - (-5)$$

$$9/2 + (-3) \times 4 - (-5)$$

$$9/((2 + (-3)) \times (4 - (-5)))$$

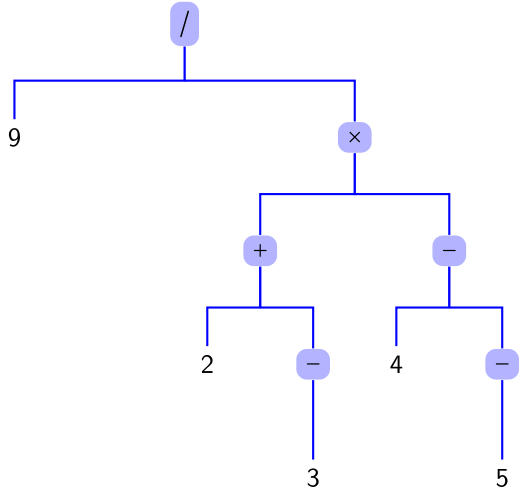
Python

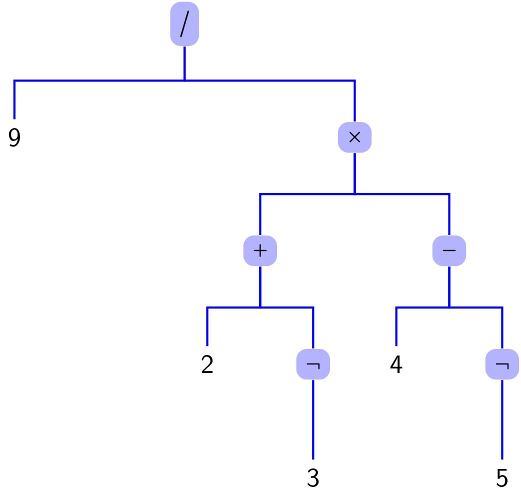
```
In [1]: 9 / 2 + (-3) * 4 - (-5)
Out[1]: -2.5

In [2]: 9 / ((2 + (-3)) * (4 - (-5)))
Out[2]: -1.0
```

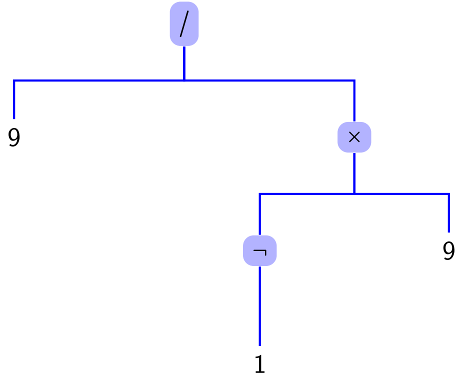
Python

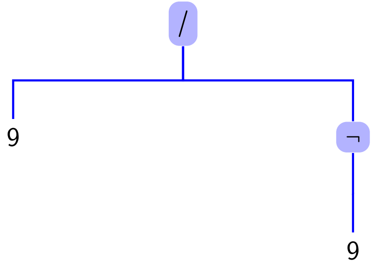
```
In [1]: 9 / 2 + (-3) * 4 - (-5)
Out[1]: -2.5

In [2]: 9 / ((2 + (-3)) * (4 - (-5)))
Out[2]: -1.0
```

```
In [3]: from operator import add, mul, inv, neg, pow, sub, truediv, floordiv

In [4]: truediv(9, mul(add(2, neg(3)), sub(4, neg(5))))
Out[4]: -1.0
```

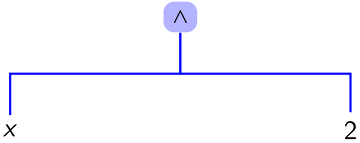

/
9
×
+
−
2
−
4
−
3
5


/
9
×
+
−
2
¬
4
¬
3
5


/
9
×
¬
9
1


/
9
¬
9

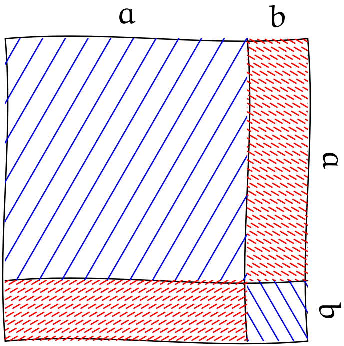
$\neg 1$


∧
x
2

Sommaire

Et les 2nde5 créèrent les nombres
- Arbre de calcul
- Identités remarquables
- Opposé - Inverse : la recherche du neutre
- Équations : la recherche de l'équilibre

Puissances
- Et l'être humain créa la multiplication


a
b
a
b

Théorème (Identité remarquable neumebeurre oine)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$b = \neg c$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$b = \neg c$$

$$a^2 + 2a(\neg c) + (\neg c)^2 = (a + (\neg c))^2$$

Théorème (Identité remarquable neumebeurre tou (en fait la première suffit))

$$a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2$$

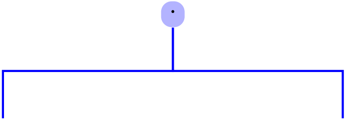
$$(x+y)(x-y) = (x+y)\cdot(x+(\neg y)) = x\cdot x+x\cdot(\neg y)+y\cdot x+y\cdot(\neg y) = x^2+xy-xy-y^2 = x^2-y^2$$

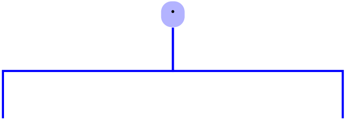
Théorème (Identité remarquable neumebeurre tri)

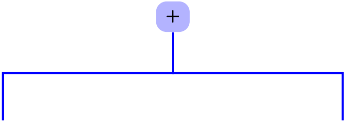
$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

- **développement** : produit devient somme

- **développement** : produit devient somme
- **factorisation** : somme devient produit

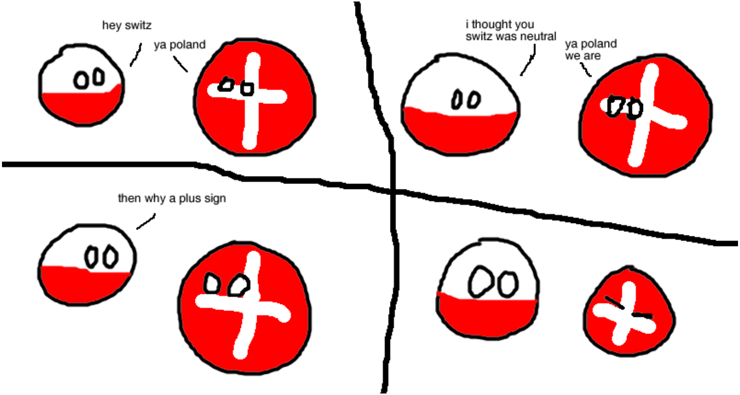


- 
- devient



Sommaire

Et les $2^{nde}5$ créèrent les nombres
Arbre de calcul
Identités remarquables
Opposé – Inverse : la recherche du neutre
Équations : la recherche de l'équilibre
Puissances
Et l'être humain créa la multiplication


hey switz
ya poland
i thought you
switz was neutral
ya poland
we are
then why a plus sign

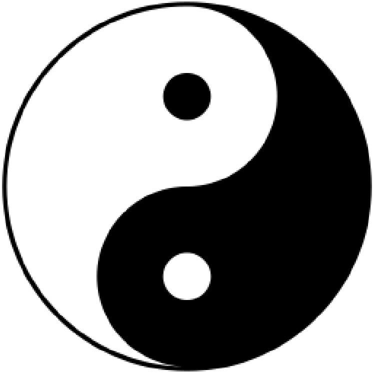
Définition (Élément neutre de l'addition)

L'élément neutre de l'addition est ZÉRO :

$$\text{nombre} + 0 = 0 + \text{nombre} = \text{nombre}$$

Recherche

On dit **L**'élément neutre mais peut-il y en avoir plusieurs pour l'addition ? Supposez par exemple qu'il en existe un deuxième. Appelons-le ♡. Que se passe-t-il ? Y a-t-il un problème ? Menez l'enquête.



Définition (Opposé d'un nombre)

L'opposé d'un nombre n est le nombre qu'il faut additionner à n pour revenir à 0 (l'équilibre).
On le note $\neg n$ ou $-n$. Sur les calculatrices on utilise la touche $\boxed{(-)}$

Définition (Élément neutre de la multiplication)

L'élément neutre de la multiplication est UN :

$$\text{nombre} \cdot 1 = 1 \cdot \text{nombre} = \text{nombre}$$


DRINK ME

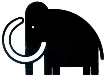
Définition (Inverse d'un nombre)

L'inverse d'un nombre n est le nombre qu'il faut multiplier à n pour revenir à 1 (l'équilibre).
On le note $\frac{1}{n}$ ou n^{-1}.

Sur les calculatrices on utilise les touches SHIFT x^{-1})

Sommaire

Et les 2nde5 créèrent les nombres
Arbre de calcul
Identités remarquables
Opposé – Inverse : la recherche du neutre
Équations : la recherche de l'équilibre
Puissances
Et l'être humain créa la multiplication



Définition (Entiers naturels)

Les entiers naturels sont les nombres qui permettent de compter les mammouths.
On note souvent **N** ou $\mathbb{N}$ l'ensemble de tous les nombres entiers Naturels.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...\}$$

Je viens d'attraper 4 mammouths. J'en ai maintenant 9. Combien en avais-je au départ ?

Je viens d'attraper 4 mammouths. J'en ai maintenant 9. Combien en avais-je au départ ?

Je viens d'attraper 4 mammouths. J'en ai maintenant 9. Combien en avais-je au départ ?

Soit m *le nombre de mammouths au départ. Alors je cherche un entier naturel* m *tel que* $m + 4 = 9$.
En fait je cherche à résoudre dans $\mathbb{N}$ *l'équation* $m + 4 = 9$ *d'inconnue* m.

Définition (Entiers relatifs)

Les entiers relatifs sont les nombres qui permettent d'emprunter des mammouths.
On note souvent **Z** ou $\mathbb{Z}$ l'ensemble de tous les nombres entiers relatifs : les Zentiers.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, \neg 5, \neg 4, \neg 3, \neg 2, \neg 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

J'ai attrapé 12 mammouths ce matin. Il ne m'en reste plus. Combien en avais-je emprunté au départ ? Je cherche le nombre m *de mammouths qui vérifie* $m + 12 = 0$.

J'ai attrapé 12 mammouths ce matin. Il ne m'en reste plus. Combien en avais-je emprunté au départ ? Je cherche le nombre m *de mammouths qui vérifie* $m + 12 = 0$.

J'ai attrapé 12 mammouths ce matin. Il ne m'en reste plus. Combien en avais-je emprunté au départ ? Je cherche le nombre m *de mammouths qui vérifie* $m + 12 = 0$.

$$m + 12 = 0 \iff m = \neg 12$$

Définition (Nombres rationnels)

Les rationnels sont les nombres qui permettent de partager des mammouths .

On note souvent **Q** ou $\mathbb{Q}$ l'ensemble de tous les nombres rationnels qui sont en fait le Quotient de deux nombres zentiers.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \ \ n \neq 0 \right\}$$

Si j'ai 3 mammouths, comment les partager équitablement avec mes quatre copains ?

Si j'ai 3 mammouths, comment les partager équitablement avec mes quatre copains ?

Si j'ai 3 mammouths, comment les partager équitablement avec mes quatre copains ?

$$3pm = 5 \Longleftrightarrow pm = \frac{5}{3}$$


Bill Hanna

Je veux enfermer mon mammouth dans un enclos en forme de triangle rectangle dont les deux côtés orthogonaux ont pour longueur 1. Quelle est la longueur du troisième côté ?

Définition (Racine carrée)

L'unique solution POSITIVE de l'équation $x^2 = a$ (qui n'a de sens que si a est positif car c'est la longueur d'un côté de mon enclos) est le nombre appelé *racine carrée de a* et noté $\sqrt{a}$.

Sur les calculatrices on utilise les touches $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\overset{\sqrt{}}{\boxed{x^2}}$


Jean Racine
1639-1699

ALEXANDRINS
Proposition. La racine carrée de deux,
est un nombre irrationnel. Pour vous, c'est un jeu
de démontrer habilement cette assertion.
Si ce nombre mystérieux est une fraction,
p/q, p, q deux entiers premiers entre eux,
vous prenez le carré. En restant scrupuleux,
vous constatez après quelques cogitations
que p est pair, entrevoyez la solution :
q est pair aussi. Contradiction. . . Vous aimez
ces mathématiques antiques et vous rêvassez
lorsqu'Euclide d'Alexandrie fait irruption,
le regard pétillant, le sourire radieux.
Il relit votre texte avec application
et approuve l'argument d'un clignement d'yeux.

Comment utiliser ce poème pour vous aider à démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ?

Définition (Nombres réels)

On dispose déjà de tous les nombres de l'ensemble $\mathbb{Q}$. Quand on ajoute à ces nombres tous ceux que l'on peut construire dans des figures géométriques on forme l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbf{R}$ des nombres Réels.

Sommaire

Et les 2nde5 créèrent les nombres
- Arbre de calcul
- Identités remarquables
- Opposé – Inverse : la recherche du neutre
- Équations : la recherche de l'équilibre

Puissances
- Et l'être humain créa la multiplication

Sommaire

Et les 2nde5 créèrent les nombres
- Arbre de calcul
- Identités remarquables
- Opposé – Inverse : la recherche du neutre
- Équations : la recherche de l'équilibre

Puissances
- Et l'être humain créa la multiplication

2 mammouths plus 2 mammouths plus 2 mammouths ça fait 3 fois 2 mammouths

2 mammouths plus 2 mammouths plus 2 mammouths ça fait 3 fois 2 mammouths

2 mammouths plus 2 mammouths plus 2 mammouths ça fait 3 fois 2 mammouths

Définition (Multiplication)

Multiplier un nombre x par l'entier naturel n c'est ajouter x n fois.

$$x \times n = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}}$$

2 mammouths plus 2 mammouths plus 2 mammouths ça fait 3 fois 2 mammouths

Définition (Multiplication)

Multiplier un nombre x par l'entier naturel n c'est ajouter x n fois.

$$x \times n = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}}$$

2 mammouths plus 2 mammouths plus 2 mammouths ça fait 3 fois 2 mammouths

Définition (Multiplication)

Multiplier un nombre x par l'entier naturel n c'est ajouter x n fois.

$$x \times n = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}}$$

$$(x \cdot n) + (x \cdot p) = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}} + \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p \text{ termes}} = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n+p \text{ termes}}$$

2 mammouths plus 2 mammouths plus 2 mammouths ça fait 3 fois 2 mammouths

Définition (Multiplication)

Multiplier un nombre x par l'entier naturel n c'est ajouter x n fois.

$$x \times n = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}}$$

$$(x \cdot n) + (x \cdot p) = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}} + \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p \text{ termes}} = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n+p \text{ termes}}$$

$$(x \cdot n) + (x \cdot p) = x \cdot (n + p)$$

2 fermes fois 2 enclos fois 2 mammouths ça fait 2^3 *mammouths*

2 fermes fois 2 enclos fois 2 mammouths ça fait 2^3 *mammouths*

2 fermes fois 2 enclos fois 2 mammouths ça fait 2^3 *mammouths*

Définition (Puissance)

Élever un nombre x à la puissance entière positive non nulle n c'est multiplier x n fois.

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}}$$

2 fermes fois 2 enclos fois 2 mammouths ça fait 2^3 *mammouths*

Définition (Puissance)

Élever un nombre x à la puissance entière positive non nulle n c'est multiplier x n fois.

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}}$$

2 fermes fois 2 enclos fois 2 mammouths ça fait 2^3 *mammouths*

Définition (Puissance)

Élever un nombre x à la puissance entière positive non nulle n c'est multiplier x n fois.

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}}$$

$$(x^n) \cdot (x^p) = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{p \text{ facteurs}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n+p \text{ facteurs}}$$

2 fermes fois 2 enclos fois 2 mammouths ça fait 2^3 *mammouths*

Définition (Puissance)

Élever un nombre x à la puissance entière positive non nulle n c'est multiplier x n fois.

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}}$$

$$(x^n) \cdot (x^p) = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{p \text{ facteurs}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n+p \text{ facteurs}}$$

$$x^n \cdot x^p = x^{n+p}$$

2 mammouths plus 2 mammouths plus 2 mammouths ça fait 3 fois 2 mammouths

$$(x \cdot n) + (x \cdot p) = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}} + \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p \text{ termes}} = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n+p \text{ termes}}$$

$$(x \cdot n) + (x \cdot p) = x \cdot (n + p)$$

2 mammouths plus 2 mammouths plus 2 mammouths ça fait 3 fois 2 mammouths

Définition (Multiplication)

Multiplier un nombre x par l'entier naturel n c'est ajouter x n fois.

$$x \times n = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}}$$

$$(x \cdot n) + (x \cdot p) = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}} + \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p \text{ termes}} = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n+p \text{ termes}}$$

$$(x \cdot n) + (x \cdot p) = x \cdot (n + p)$$

2 fermes fois 2 enclos fois 2 mammouths ça fait 2^3 *mammouths*

$$(x^n)\cdot(x^p) = \underbrace{x\cdot x\cdot\dots\cdot x}_{n\ \text{facteurs}}\cdot\underbrace{x\cdot x\cdot\dots\cdot x}_{p\ \text{facteurs}} = \underbrace{x\cdot x\cdot\dots\cdot x}_{n+p\ \text{facteurs}}$$

$$x^n\cdot x^p = x^{n+p}$$

2 fermes fois 2 enclos fois 2 mammouths ça fait 2^3 *mammouths*

Définition (Puissance)

Élever un nombre x à la puissance entière positive non nulle n c'est multiplier x n fois.

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}}$$

$$(x^n) \cdot (x^p) = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{p \text{ facteurs}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n+p \text{ facteurs}}$$

$$x^n \cdot x^p = x^{n+p}$$

$$(x^n)^p$$

$$(x^n)^p = \underbrace{\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}} \cdot \dots \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}}}_{p \text{ facteurs}}$$

$$(x^n)^p = \underbrace{\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}} \cdot \dots \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}}}_{p \text{ facteurs}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \cdot p \text{ facteurs}}$$

$$(x^n)^p = \underbrace{\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}} \cdot \dots \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ facteurs}}}_{p \text{ facteurs}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \cdot p \text{ facteurs}}$$

Théorème (Puissance de puissances)

$$(x^n)^p = x^{n \cdot p}$$

Définition (Puissance ¬1)

$$x^{\neg 1} = \frac{1}{x}$$

Définition (Puissance ¬1)

$$x^{\neg 1} = \frac{1}{x}$$

Définition (Puissance ¬1)

$$x^{\neg 1} = \frac{1}{x}$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} = x^{1} \cdot x^{\neg 1} = x^{1-1} = x^{0}$$

Définition (Puissance ¬1)

$$x^{\neg 1} = \frac{1}{x}$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} = x^{1} \cdot x^{\neg 1} = x^{1-1} = x^{0}$$

Théorème (Puissance nulle)

$$x^{0} = 1$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x}$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{x}$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdot \cdots = (x \cdot x \cdots) \cdot (\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdots)$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdots\cdots = (x \cdot x \cdots\cdots) \cdot (\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdots\cdots) = x^p \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdot \cdots = (x \cdot x \cdots) \cdot (\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdots) = x^p \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = x^p \cdot (x^{\neg 1})^p$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdot \cdots = (x \cdot x \cdots) \cdot (\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdots) = x^p \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = x^p \cdot (x^{\neg 1})^p = x^p \cdot x^{\neg p}$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdot \cdots = (x \cdot x \cdot \cdots) \cdot (\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \cdots) = x^p \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = x^p \cdot (x^{\neg 1})^p = x^p \cdot x^{\neg p} = x^{p-p}$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdot \cdots = (x \cdot x \cdots) \cdot (\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdots) = x^p \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = x^p \cdot (x^{\neg 1})^p = x^p \cdot x^{\neg p} = x^{p-p} = x^0$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots = (x \cdot x \cdot \dots) \cdot (\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots) = x^p \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = x^p \cdot (x^{\neg 1})^p = x^p \cdot x^{\neg p} = x^{p-p} = x^0$$

Théorème (Puissance négative)

$$x^{\neg p} = \frac{1}{x^p}$$

$$x = (x^p)^2 = x^{2p}$$

$$x = (x^p)^2 = x^{2p}$$

$$1 = \frac{x^{2p}}{x} = x^{2p-1} = x^0$$

$$x = (x^p)^2 = x^{2p}$$

$$1 = \frac{x^{2p}}{x} = x^{2p-1} = x^0$$

$$2p - 1 = 0$$

$$x = (x^p)^2 = x^{2p}$$

$$1 = \frac{x^{2p}}{x} = x^{2p-1} = x^0$$

$$2p - 1 = 0$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$