Chapitre 2

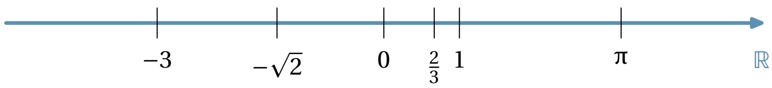
Un peu d'ordre

I - Ordre dans $\mathbb{R}$

a. Découverte du problème

Mathémator : Vous vous souvenez, cher disciple, que l'on peut représenter les nombres réels sur une droite orientée munie d'un repère :

Secondix : Oui ! Nous avons vu ça dans le chapitre précédent. Comme mon cours est très bien ordonné, je retrouve tout de suite la figure que nous avions tracée :



Mathémator : Tous les réels correspondent aux abscisses de cette droite et vice versa. Comment pourriez-vous classer les abscisses des points de cette droite ?

Secondix : Ben, comme il y a une flèche au bout, je dirais qu'on va du plus petit au plus grand en partant de la gauche vers la droite.

Mathémator : C'est l'idée mais il faudrait quelque chose de plus rigoureux pour pouvoir se débrouiller en calcul algébrique, c'est-à-dire avec des nombres a priori inconnus.

Secondix : Pfff... vous allez encore couper les cheveux en quatre et tout compliquer !

Mathémator : Mon petit Secondix, si vous ne savez pas exactement de quoi vous parlez, vous risquez de dire beaucoup de grosses bêtises. Et si vous n'avez pas de repères solides qu'on appelle les *définitions*, vous allez vous perdre dans le labyrinthe de la Science.
Mais je veux vous faire plaisir et nous n'allons pas remonter à l'origine de la connaissance humaine : nous supposerons que vous savez ce que signifie, pour un nombre, être positif ou négatif.

Secondix (à part) : *Il me prend vraiment pour un idiot* **(tout haut) :** Je crois que c'est à ma portée, Maître.

Mathémator : Fort bien, alors énonçons notre première définition qui servira de socle à tout ce chapitre :

Définition 1 : comparaison de deux nombres réels

Deux nombres a et b vérifient l'inéquation $a < b$ si, et seulement si, $a - b$ est négatif ou $b - a$ est positif.
Comparer deux nombres c'est étudier le *signe de leur différence.*

Secondix : Excusez-moi mais là, c'est vraiment de la torture gratuite de disciple. Je sais que 2 est plus petit que 3, je n'ai pas besoin de passer par votre définition alambiquée.

Mathémator : Tout doux mon jeune ami ! Prenez le temps de réfléchir avant d'émettre un jugement si radical.

Exemple 1 : comment ranger des carrés ?

Considérons deux nombres quelconques a et b vérifiant $a < b$: comment sont rangés leurs carrés ?

b. Théorèmes de rangement

Secondix : Par exemple, $2 < 3$ et $2^2 < 3^2$: ils sont rangés dans le même sens.

Mathémator : Mais $-3 < -2$ et cependant $(-3)^2 > (-2)^2$... Des exemples ne suffisent pas à conclure : que pensez-vous de -1 et 2 ? De -2 et 1 ?

Secondix : Oui mais s'ils sont tous positifs, ça marche.

Mathémator : Dois-je vous croire sur parole ? Il me faudrait une preuve car le terrain semble miné.
Suivons votre idée et considérons deux nombres **positifs** a et b tels que $a < b$. Pour comparer leurs carrés il faudrait, d'après notre définition, étudier le signe de leur différence. Allons-y !
Vous savez que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Or a et b sont positifs donc $a+b$ l'est aussi.
De plus $a < b$ donc $a-b$ est négatif.
Ainsi, $a^2 - b^2$ est le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif.

Théorème 1 : règle des signes (admise)

Le produit de deux nombres de même signe est positif.
Le produit de deux nombres de signes opposés est négatif.

D'après la règle des signes, $a^2 - b^2$ est donc négatif, c'est-à-dire que $a^2 < b^2$.
Nous venons donc de *démontrer* que deux nombres *positifs quelconques* et leurs carrés sont rangés *dans le même ordre*.
Je vous laisse démontrer ce qui se passe pour deux nombres négatifs à titre d'exercice.

Secondix : Et s'ils ne sont pas de même signe ?

Mathémator : nous avons vu sur un exemple que la conclusion n'est pas aussi simple. Nous nous contenterons donc de comparer des carrés de nombres de même signe.

Théorème 2 : rangement des carrés

Deux nombres *positifs* et leurs carrés sont rangés *dans le même ordre.*

Deux nombres *négatifs* et leurs carrés sont rangés *dans l'ordre inverse.*

Pour ne pas que vous perdiez la main, vous démontrerez également à titre d'exercice le théorème suivant :

Théorème 3 : rangement des inverses

Deux nombres non nuls et de même signe et leurs inverses sont rangés ......

Secondix (à part) : *le sale boulot, c'est toujours pour les mêmes...* **(tout haut) :** Ce sera un plaisir, ô astre de la connaissance.

c. Ordre et opérations

Mathémator : Vous êtes plus léger qu'un gorille adulte.

Secondix : J'ai en effet surveillé mon alimentation ces derniers temps.

Mathémator : Bien ! Supposons qu'on vous mette dans les bras chacun un poids de 10kg : serez-vous toujours le plus léger ?

Secondix (à part) : *Je me méfis de ses questions tordues* **(tout haut) :** je pense que oui.

Mathémator : On doit pouvoir énoncer quelque chose de semblable pour les nombres :

Théorème 4 : addition d'un nombre aux deux membres d'une inégalité

Soit a, b et c trois nombres réels quelconques ; *si* $a < b$ *alors* $a+\mathbf{c} < b+\mathbf{c}$.
Ce qui signifie qu'additionner *un même nombre* (positif ou négatif) aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de cette inégalité.

Secondix : Bon ben voilà.

Mathémator : Pas si vite jeune disciple ! Notre illustration zoologique n'est pas une preuve : on pourrait être trompé par des images...
Notre seule arme à disposition est la définition 1 page 1. Nous voulons *comparer* $a+c$ et $b+c$: il s'agit d'*étudier le signe* de leur différence. Allez-y !

Secondix : J'essaye : $a+c-b+c$.

Mathémator : STOP ! Vous oubliez les parenthèses : on doit retrancher le nombre $(b+c)$ au nombre $(a+c)$.

Secondix (à part) : *Comment fait-il pour savoir oralement que j'ai oublié les parenthèses ?* **(tout haut) :** Certes Maître, je reprends : $(a+c)-(b+c) = a+c-b-c = a-b+c-c = a-b$ euh... ah ! On sait que $a < b$ donc $a-b$ est négatif. Or $a-b = (a+c)-(b+c)$ donc $(a+c)-(b+c)$ est négatif aussi ce qui signifie que $a+c < b+c$.

Mathémator : Vous venez de mener brillamment votre première démonstration en algèbre !

Secondix : J'en suis tout bouleversé !

Mathémator : Afin de ménager vos émotions, nous allons nous contenter d'énoncer les théorèmes suivants et vous les démontrerez à titre d'exercice.
Nous avons additionné, il ne reste plus qu'à multiplier...

Secondix : Ben c'est pareil : si un élève de 2^{nde} est plus léger qu'un gorille alors dix élèves de 2^{nde} sont plus légers que dix gorilles.

Mathémator : Belle image, certes, mais qui peut être trompeuse : on a $2 < 3$ mais est-ce que $2 \times (-1) < 3 \times (-1)$? Soyons donc prudents avec les illustrations...

Théorème 5 : multiplication des deux membres d'une inégalité par un nombre

Soit trois nombres réels a, b et c tels que $a < b$ et $c \neq 0$.
- si c est *positif* alors $a \cdot c < b \cdot c$;
- si c est *négatif* alors $a \cdot c > b \cdot c$

Autrement dit :
- multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre *positif ne change pas le sens* de cette inégalité ;
- multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre *négatif change le sens* de cette inégalité.

Comme tout à l'heure, vous étudierez le signe d'une différence.

Secondix : Pourquoi avoir précisé $c \neq 0$?

Mathémator : Cherchez la réponse : elle est cachée dans votre brillant cerveau... Mais passons à autre chose.
Maintenant, pour vous faire plaisir, reprenons un petit exemple : vous êtes plus léger qu'un gorille et votre sœur est plus légère qu'une baleine donc vous et votre sœur êtes plus légers qu'un gorille et une baleine réunis.

division par un même nombre

Une division est une multiplication par l'inverse donc la division membre à membre suit les mêmes règles que la multiplication membre à membre.

Théorème 6 : addition membre à membre

Soit a, b, c et d quatre nombres réels. Alors

$$\left.\begin{array}{l} a<b \\ c<d \end{array}\right\} \Longrightarrow a+c<b+d$$

ce qui signifie qu'en additionnant membre à membre deux inégalités on n'en change pas le sens.

Pour le dernier théorème, nous ne donnerons pas de démonstration car elle est plus difficile et je ne voudrais pas vous décourager donc nous l'admettrons exceptionnellement..

Secondix (à part) : *Enfin une bonne nouvelle* **(tout haut) :** ah quel dommage !

Mathémator : Vous pouvez toujours vous y frottez si ça vous chante...

Théorème 7 : multiplication membre à membre

Soit a, b, c et d quatre nombres réels $\boxed{\text{POSITIFS}}$. Alors

$$\left.\begin{array}{l} a<b \\ c<d \end{array}\right\} \Longrightarrow a\cdot c<b\cdot d$$

ce qui signifie qu'en multipliant membre à membre deux inégalités entre nombres POSITIFS on n'en change pas le sens.

Vous aurez noté l'importance du terme POSITIF. Essayez avec $-2<5$ et $-3<-1$...
Il nous reste un dernier théorème pour la route que *vous démontrerez* également :

Théorème 8 : comparaison à 1

Soit a et b deux nombres réels avec $\boxed{b \neq 0}$.

- si a et b sont POSITIFS, $a<b \Longleftrightarrow \frac{a}{b}<1$;
- si a et b sont NÉGATIFS, $a<b \Longleftrightarrow \frac{a}{b}>1$

II - Intervalles

a. Définition

Mathémator : Nous avons déjà parlé des ensembles de nombres $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$. Cependant, nous pouvons être amenés à parler d'une partie seulement d'un de ces ensembles.
Par exemple, quand il y a un nombre fini d'éléments, on utilise des accolades :

$$\left\{1, 2, 4, \sqrt{37}\right\}$$

est l'ensemble constitué des quatre nombres 1, 2, 4 et $\sqrt{37}$.

Cette façon de décrire un ensemble de nombres peut s'avérer inutilisable dans certains cas. Par exemple, peut-on donner la liste de TOUS les nombres réels entre -3 et 2 ?

Secondix : euh...

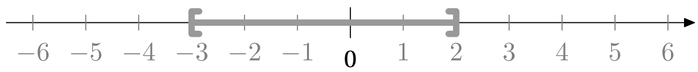
Mathémator : rappelez-vous qu'on ne peut même pas parler de *successeur* d'un réel. S'il existait un plus petit réel supérieur à -3, alors il suffirait de considérer le milieu de -3 et de ce nombre : il est réel et est plus petit que le soi-disant plus petit ce qui est impossible.

Secondix (à part) : *qu'est-ce que c'est que ce délire ?* **(tout haut) :** Si vous le dites...

Mathémator : comme on ne peut pas faire la liste de tous les nombres compris entre -3 et 2, on va reprendre l'image de la DROITE des réels.
Rappelez-vous : soit deux points distincts A et B d'une droite ; comment appelle-t-on l'ensemble des points de la droite situés entre A et B ?

Secondix : Ça je sais ! C'est le segment de droite [AB] : on le note avec des crochets.

Mathémator : Et bien on va utiliser la même notation avec les nombres mais au lieu de parler de *segment* $[-3;2]$ on dira *intervalle* $[-3;2]$.



Secondix : Ah oui : quand il y a une infinité de nombres, on utilise des crochets.

Mathémator : non : ce n'est pas si simple.

Secondix (à part) : *Ça m'aurait étonné...* **(tout haut) :** Ben pourtant dans $[-3;2]$ il y a une infinité de nombres et dans $\left\{-3;2\right\}$ il n'y a que les deux nombres -3 et 2 si j'ai bien compris.

Mathémator : vous avez bien compris mais on peut utiliser des accolades même avec une infinité de nombres. Plus troublant, on peut décrire l'intervalle $[-3;2]$ à l'aide d'accolades...

$$[-3;2] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 2\right\}$$

ce qui signifie : « l'intervalle $[-3;2]$ est l'ensemble des nombres réels x vérifiant $-3 \leqslant x \leqslant 2$ », c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels compris entre -3 et 2.

Secondix (à part) : *Qu'est-ce que c'est que c't'embrouille* **(tout haut) :** Bon ben c'est quoi alors un intervalle ?!

Mathémator : Je vais vous donner la définition officielle mais je vais d'abord vous en donner un petit truc qui est très pratique pour comprendre ce qu'est un intervalle (il faudra garder ça entre nous...)

Définition intuitive d'un intervalle

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de trou...

Secondix (à part) : *C'est plutôt lui qui a un trou dans le cerveau* **(tout haut) :** « qui n'a pas de trou » ? ?

Mathémator : Eh oui ! Par exemple l'ensemble $\left\{-3;2\right\}$ a un trou puisqu'il manque tous les nombres entre -3 et 2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a aussi un trou puisqu'il manque 0. Voici la définition :

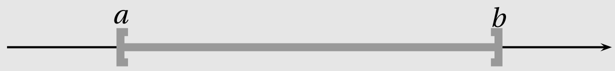
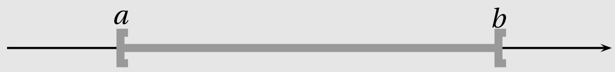
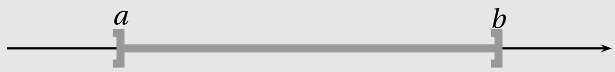
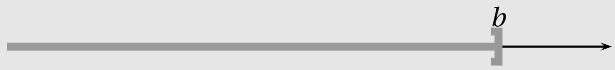
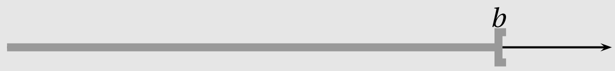
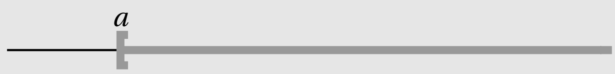
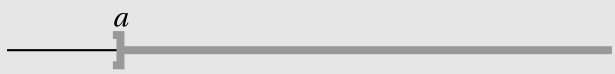
Définition 2 : intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ d'un des 10 types suivants, les bornes a et b étant des réels.

1^er^ cas : $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$, c'est-à-dire tous les nombres réels ;

2^ème^ cas : $\emptyset$, c'est-à-dire l'ensemble vide ;

Autres cas : l'une des huit situations suivantes

	Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
Intervalles bornés	$[a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
	$[a;b[$	$a \leqslant x < b$	
	$]a;b]$	$a < x \leqslant b$	
	$]a;b[$	$a < x < b$	
Intervalles non bornés	$]-\infty;b]$	$x \leqslant b$	
	$]-\infty;b[$	$x < b$	
	$[a;+\infty[$	$a \leqslant x$	
	$]a;+\infty[$	$a < x$	

Rajoutons un peu de vocabulaire :

Définition 3 : vocabulaire

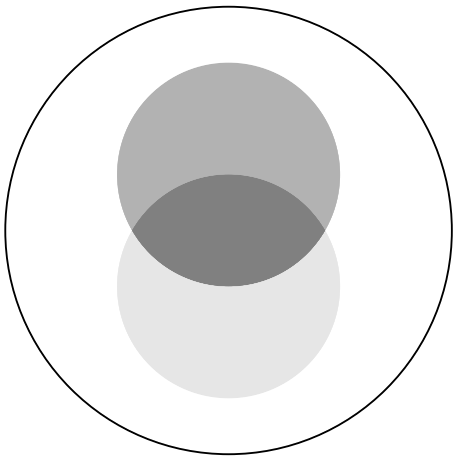
- $[a\,;b]$, $]a\,;b[$, $]a\,;b]$, et $[a\,;b[$ sont des **intervalles bornés** ;
- les réels a et b sont les **bornes** de l'intervalle ;
- $b-a$ est **l'amplitude** de l'intervalle $[a\,;b]$;
- $\frac{a+b}{2}$ est le **centre** de l'intervalle ;
- $[a\,;b]$ est un intervalle **fermé** ;
- $]a\,;b[$ est un intervalle **ouvert** ;
- $]a\,;b]$ est un intervalle **ouvert en a et fermé en b**.

b. Réunion et intersection

Mathémator : Ces différents types d'intervalles ne vont pas suffire pour décrire tous les ensembles de nombres que nous allons rencontrer cette année. Par exemple, on voudrait caractériser les nombres qui sont inférieurs à -3 ou supérieurs à 2.

Secondix : Ben c'est l'intervalle $]-\infty\,;-3]$ plus l'intervalle $[2\,;+\infty[$

Mathémator : C'est l'idée mais votre « plus » prête à confusion : qu'est-ce qu'on on additionne ? Les bornes ? Les éléments des intervalles ? Qu'est-ce qu'un addition d'intervalles ? Je vois bien ce que vous voulez dire mais vous n'êtes pas assez précis.
Faisons un petit voyage dans le temps et considérons votre classe de CP.
Il y avait Alain, Bernard, Corine, Daniel, Élisabeth, Monique, Robert, Henriette, Isabelle et Jacques. Parmi eux, seuls Bernard, Élisabeth, Henriette et Jacques portaient des lunettes.
Appelons G l'ensemble des garçons et L l'ensemble des enfants à lunettes.
Représentez la classe de CP en complétant les patates suivantes :



Quel est l'ensemble contenant les garçons et les enfants à lunettes ?

Secondix : C'est les élèves qui sont dans G ou dans L mais il n'a pas encore de nom.

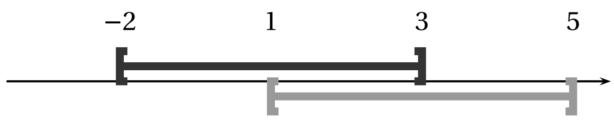
Mathémator : C'est cela. Nous allons lui en donner un officiel. On dira que c'est *la réunion* de G et L. On la notera $G \cup L$ et on lira « G union L ».
Pour les intervalles, c'est la même idée car il s'agit d'ensembles avant tout.

Définition 4 : réunion d'intervalle

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un **OU** à l'autre des deux intervalles.

Exemple 2 :

La réunion des intervalles $[-2\,;3]$ et $[1\,;5]$ est l'ensemble des réels x qui vérifient : $-2 \leqslant x \leqslant 3$ OU $1 \leqslant x \leqslant 5$.
C'est l'ensemble des réels x tels que : $-2 \leqslant x \leqslant 5$ soit l'intervalle $[-2\,;5]$.
Graphiquement, cela correspond à la partie de la droite graduée qui est hachurée au moins une fois.



On note $[-2\,;3] \cup [1\,;5] = [-2\,;5]$ où **le symbole « $\cup$ » se lit « union ».**

Maintenant, si l'on veut décrire l'ensemble des garçons à lunettes...

Secondix : c'est l'ensemble des enfants qui sont à la fois dans F et dans L. Je suppose qu'il va porter un nom spécial.

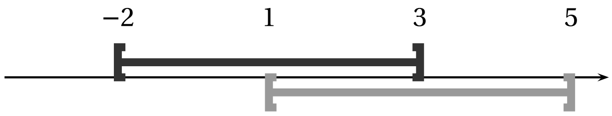
Mathémator : Oui ! On dira simplement que c'est *l'intersection* de G et L. On la notera $G \cap L$ et on lira « G inter L ». Pour les intervalles, c'est encore la même idée.

Définition 5 : intersection d'intervalle

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un **ET** à l'autre des deux intervalles.

Exemple 3 :

L'intersection des intervalles $[-2\,;3]$ et $[1\,;5]$ est l'ensemble des réels x qui vérifient : $-2 \leqslant x \leqslant 3$ ET $1 \leqslant x \leqslant 5$.
C'est l'ensemble des réels x tels que : $1 \leqslant x \leqslant 3$ soit l'intervalle $[1\,;3]$.
Graphiquement, cela correspond à la partie de la droite graduée qui est hachurée deux fois.



On note $[-2\,;3] \cap [1\,;5] = [1\,;3]$ où **le symbole « $\cap$ » se lit « inter ».**

c. Première application : résolution d'inéquations linéaires

Mathémator : Nous allons à présent utiliser tout ce que nous venons de (re)voir pour résoudre une inéquation linéaire, c'est-à-dire où l'inconnue x intervient dans une expression du type ax.

Exemple 4 : inéquation linéaire

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3(x-3) < 4$

Secondix : Ce n'est pas tout à fait le type d'expression annoncée...

Mathémator : Il ne faut pas se laisser tromper par les apparences ! $-3(x-3) = -3x+9$: l'inconnue x n'est en fait que multipliée par un nombre constant.

Secondix : Bah, c'est toujours comme ça alors.

Mathémator : Une nouvelle fois vous parlez avant de réfléchir ! Par exemple, l'inéquation $3x^3 + \sqrt{x} + 3x + 2 < 4$ n'est pas linéaire en x car x est élevé au cube, on en prend la racine carrée : c'est beaucoup lpus compliqué à étudier...

Secondix : Et puis « résoudre dans $\mathbb{R}$ », ça veut dire quoi au juste ?

Mathémator : Résoudre une inéquation dans un ensemble, c'est trouver les nombres appartenant à cet ensemble qui vérifient l'inéquation, c'est-à-dire qui la rendent vraie quand on remplace l'inconnue par l'un d'entre eux.
À la fin d'une inéquation, il faudra donc donner un *ensemble de solutions*.

$$\begin{array}{rl}
-3(x-3) > 4 & \\
 & \div(-3) \text{ qui est négatif} \\
x-3 < -\dfrac{4}{3} & \\
 & +3 \\
x < -\dfrac{13}{3} &
\end{array}$$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions est $S = \left]-\infty\,; -\frac{13}{3}\right[$
Occupons-nous à présent d'un cas un peu plus compliqué.

Exemple 5 : système d'inéquations linéaires à une inconnue

Résolvez dans $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} -2(t+1) \leqslant 5t-1 \\ 3\left(t+\dfrac{2}{3}\right) < t+6 \end{cases}$

Il s'agit de trouver les valeurs du réel t qui vérifient *à la fois* les deux inéquations. Occupez-vous de chacune séparément et nous regrouperons les résultats.

Secondix : Je suis prêt, Maître :

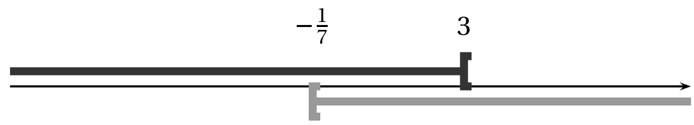
$$\begin{aligned} -2(t+1) &\leqslant 5t-1 \\ -2t-2 &\leqslant 5t-1 \quad +2 \\ -2t &\leqslant 5t+1 \quad -5t \\ -7t &\leqslant 1 \quad \div(-7) \\ t &\geqslant -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\left(t+\frac{2}{3}\right) &< t+8 \\ &< \\ &< \\ t & \end{aligned}$$

$S_1 = [-\frac{1}{7}\,; +\infty[$

$S_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

L'inconnue t doit donc être à la fois dans les deux ensembles : $S = S_1 \cap S_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



III - Tableaux de signes

a. Valeurs critiques d'une expression

Mathémator : Vous verrez l'an prochain, si vous passez brillamment les épreuves de cette première année d'apprentissage Mathaïe, que la plupart du temps, nous résoudrons des inéquations pour étudier des signes. Je ne parle bien sûr pas des majestueux volatiles blancs.

Secondix (à part) : *Et en plus il m'impose ses blagues à deux centimes* **(tout haut) :** Ah Ah Ah ! J'aimerai tant avoir votre humour.

Mathémator : Oh ! Ça me vient naturellement. Bon, revenons à nos inéquations. Avant toute étude de signe, il faudra repérer les dangers :

Définition 6 : valeurs critiques

Soit $E(x)$ une expression où apparaît une variable x. Les *valeurs critiques* de l'expression $E(x)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont
- les valeurs de x dans I pour lesquelles $E(x)$ s'annule (appelées *racines* de l'expression) ;
- les valeurs de x dans I pour lesquelles $E(x)$ n'existe pas (appelées *valeurs interdites* de l'expression).

Secondix : Je demande à voir...

Mathémator : Voici quelques exemples :

Exemple 6 :

Rechercher les valeurs critiques de $3x-1$ sur $\mathbb{R}$.

Il est clair $3x-1=0$ si, et seulement si, $x=\frac{1}{3}$.
D'autre part, $3x-1$ existe pour toute valeur de x dans $\mathbb{R}$.
L'expression $3x-1$ admet donc exactement une valeur critique, $\frac{1}{3}$, qui n'est pas une valeur interdite.

Exemple 7 :

Rechercher les valeurs critiques de x^2-4 sur $\mathbb{R}$.

L'équation $x^2-4=0$ équivaut à $(x-2)(x+2)=0$. Il y a donc deux racines, 2 et -2.
D'autre part, x^2-4 existe pour toute valeur de x dans $\mathbb{R}$, donc il n'y a pas de valeur interdite.
L'expression x^2-4 admet donc exactement deux valeurs critiques, 2 et -2, qui sont toutes deux des racines.

Exemple 8 :

Rechercher les valeurs critiques de $\frac{2x-5}{-x+7}$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation $\frac{2x-5}{-x+7}=0$ équivaut à $2x-5=0$. On obtient ainsi comme première valeur critique $\frac{5}{2}$, qui est l'unique racine de cette expression.
D'autre part, $\frac{2x-5}{-x+7}$ n'existe pas quand $-x+7=0$. Pourquoi ?

Secondix : Ben on ne peut pas diviser par zéro.

Mathémator : La force est avec vous jeune Mathaïe !
On a donc une seconde valeur critique, la valeur interdite $x=7$.
En conclusion, l'expression admet 2 valeurs critiques, la racine $\frac{5}{2}$ et la valeur interdite 7.

Valeur critique d'une expression affine

Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. L'expression $ax+b$ admet pour unique valeur critique son unique racine $x=-\frac{b}{a}$.

b. Valeurs témoins et signe d'une expression

Mathémator : On se place dans un intervalle I dont les bornes a et b sont éventuellement infinies.**Une expression dépendant de la variable x ne peut changer de signe que de part et d'autre d'une valeur critique.**

Secondix : Excusez-moi de vous interrompre mais pourquoi ce la ?

Mathémator : Je suis heureux de constater que votre esprit est en alerte. La preuve de ce résultat ne pourra vous être donnée qu'en année terminale de votre cycle de formation malheureusement. Pour une explication à notre niveau actuel, il faudra attendre le prochain chapitre pour avoir une illustration graphique de la situation.

Détermination pratique du signe d'une expression sur un intervalle

On peut découper notre intervalle en petits intervalles sans point critique.
Sur ces petits intervalles, l'expression ne change pas de signe. Il suffit donc de tester sur une valeur témoin dans chaque mini intervalle.

Secondix : Cela semble très pratique... mais en fait je n'ai rien compris.

Mathémator : Ffffffff... Bon, prenons un exemple :

Exemple 9 :

Déterminer le signe de $3x-1$ en fonction de la valeur de x sur $\mathbb{R}$

On a vu que l'expression $3x-1$ a exactement une valeur critique, $\frac{1}{3}$, qui n'est pas une valeur interdite. Il nous faut donc trouver le signe de $3x-1$ sur les intervalles $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ et $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.
Sur le premier intervalle, prenons la valeur témoin $x=0$. On obtient alors $3\times 0-1=-1<0$, donc l'expression est négative sur cet intervalle.
Sur le second intervalle, prenons la valeur témoin $x=1$. On obtient alors $3\times 1-1=2>0$, donc l'expression est positive sur cet intervalle. On peut résumer ces informations dans le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x-1$		$-$	0	$+$	

Voyons un cas plus compliqué :

Exemple 10 :

Déterminer le signe de x^2-4 en fonction de la valeur de x sur $\mathbb{R}$.

On sait que l'expression x^2-4 admet exactement deux valeurs critiques, 2 et -2, qui sont toutes deux des racines. Il faut donc déterminer son signe sur les intervalles $]-\infty;-2[$, $]-2;2[$ et $]2;+\infty[$. Pour cela on va choisir une valeur témoin dans chaque intervalle :

- sur $]-\infty;-2[$, en prenant $x=-3$ on obtient $(-3)^2-4=5>0$, donc l'expression x^2-4 est positive ;
- sur $]-2;2[$, en prenant $x=0$ on obtient $0^2-4=-4<0$, donc l'expression x^2-4 est négative ;
- sur $]2;+\infty[$, en prenant $x=3$ on obtient $3^2-4=5>0$, donc l'expression x^2-4 est positive.

On peut alors établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et un autre avec une valeur interdite :

Exemple 11 :

Déterminer le signe de $\frac{2x-5}{-x+7}$ en fonction de la valeur de x sur $\mathbb{R}$.

On sait que cette expression admet 2 valeurs critiques, la racine $\frac{5}{2}$ et la valeur interdite 7. Il faut donc déterminer son signe sur les intervalles $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$, $\left]\frac{5}{2};7\right[$ et $\left]7;+\infty\right[$. Pour cela on va choisir une valeur témoin dans chaque intervalle :

- sur $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$, en prenant $x=0$ on obtient $\frac{2\times 0-5}{-0+7}=-\frac{5}{7}<0$, donc l'expression $\frac{2x-5}{-x+7}$ est négative ;
- sur $\left]\frac{5}{2};7\right[$, en prenant $x=5$ on obtient $\frac{2\times 5-5}{-5+7}=\frac{5}{2}>0$, donc l'expression $\frac{2x-5}{-x+7}$ est positive ;
- sur $\left]7;+\infty\right[$, en prenant $x=10$ on obtient $\frac{2\times 10-5}{-10+7}=-5<0$, donc l'expression $\frac{2x-5}{-x+7}$ est négative.

On peut alors établir le tableau de signes suivant, où la valeur interdite est représentée par une double barre verticale :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	7	$+\infty$
Signe de $\frac{2x-5}{-x+7}$			$\Vert$	

Merci à Aymar de SAINT SEINE et Mickaël VÉDRINE