Mathématiques

T^{ale}S3 / 2018-2019

Mis à jour le 10 octobre 2018 à 10:58

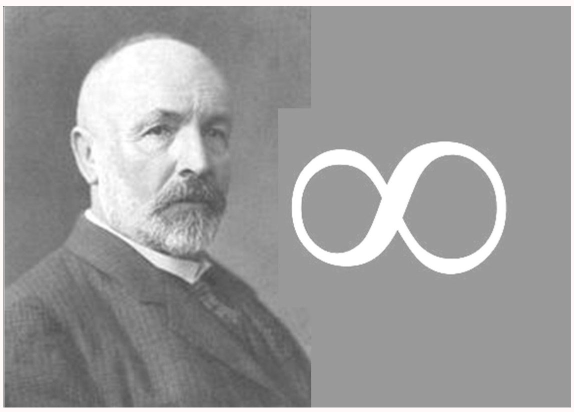
Une année de mathématiques en T^{ale}S

Guillaume CONNAN

Notre Dame LYCÉES Rezé

THÈME N° 1

Vers l'infini et au-delà



Georg Cantor est mort pauvre, solitaire et déprimé en janvier 1918 après avoir prouvé 40 ans auparavant l'existence de plusieurs infinis et fondé la théorie des ensembles. L'infini devenait alors un objet mathématique plutôt qu'un argument philosophique. Il fut alors farouchement méprisé, dépeint comme un charlatan par Kronecker, ses idées étant une maladie grave selon Henri Poincaré. Cela l'a conduit à une profonde dépression même si son travail a ensuite été loué.
Cela bat en pièces l'idée que les mathématiques sont une science sans passion ni contradiction, mais renforce celle selon laquelle elles sont un art. En outre, la démonstration communément appelée *diagonale de Cantor* est un exemple de beauté mathématique : si simple et si puissante.
Et j'adore une des citations les plus célèbres de Cantor :

L'essence des mathématiques réside dans leur liberté

1 Le programme

Contenus

- Limite finie ou infinie d'une suite ;
- Limite et comparaison ;
- Opérations sur les limites ;
- Comportement à l'infini de la suite (q^n), q étant un nombre réel ;
- Suite majorée, minorée, bornée

Capacités attendues

- Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.
- Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
  — u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ;
  — u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$:

  alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$;
- Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites ;
- Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$;
- Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique ;
- Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.

2 Souvenirs de Première

2 1 Définition

Définition 1 - 1

suite numérique
Une suite (sous-entendue numérique) est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ou sur une partie seulement de $\mathbb{N}$.
Définir une suite, c'est donc associer un nombre réel à tout élément d'une partie de $\mathbb{N}$.

Par exemple si on considère les multiples de 10, on peut écrire : $d\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 10n \end{array}$. Ainsi, le multiple numéro 3 est $d(3) = 10 \times 3 = 30$

Idée

Notation usuelle Au lieu d'utiliser la notation habituelle $d(n)$ pour désigner l'image de n, on utilise souvent d_n.
Dans notre exemple, $d_n = 10n$, quelque soit l'entier naturel n.
La suite d est de *terme général* d_n. Au lieu de d, on désigne aussi la suite par $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même plus simplement (d_n).
On appelle d_n le *terme d'indice* n ou encore le *terme de rang* n.

Danger

Il ne faudra pas confondre le *nombre* d_n avec la *suite* (c'est-à-dire fonction) (d_n)...

2 2 Suite dont le terme général est donné explicitement

En fait, cela veut dire que l'on connaît l'expression de u_n en fonction de n et que l'on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite.

Définition 1 - 2

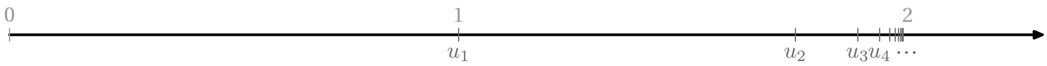
suite définie explicitement
Soit D une partie de $\mathbb{N}$ et soit f une fonction définie sur n. Soit u une suite telle que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in D$. On dit alors que u est définie explicitement.

Exemple

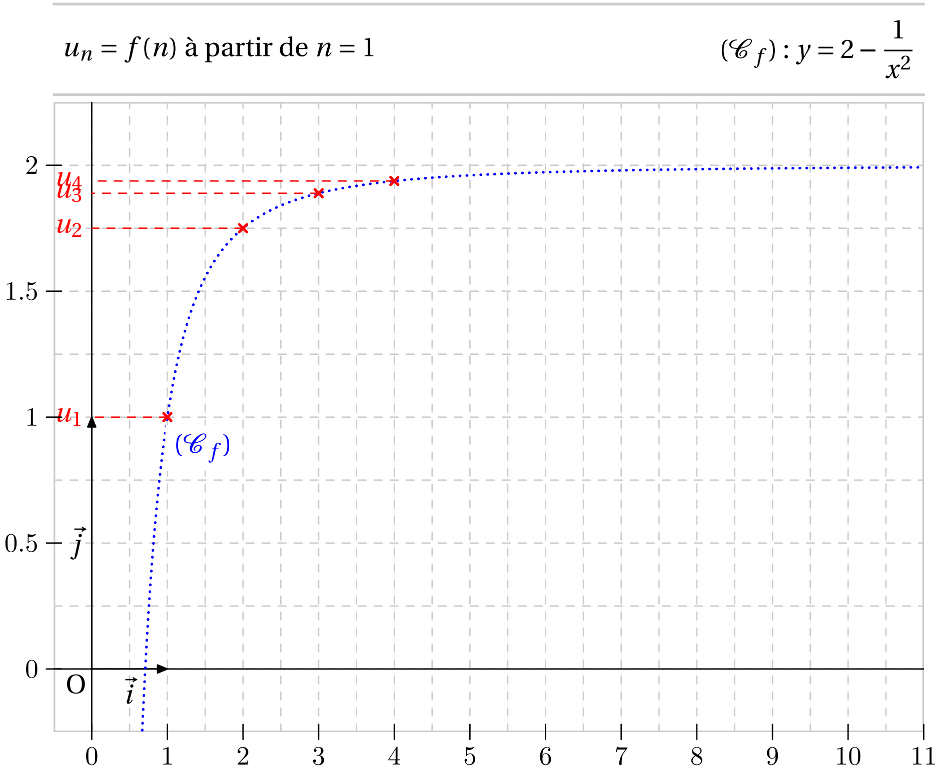
Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n^2}$.

On obtient par exemple $u_1 = 2 - 1 = 1$, $u_2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, $u_{10} = 2 - \frac{1}{100} = \frac{199}{100}$
On peut même tracer sa représentation graphique. On peut le faire

- sur un axe :



- dans un repère du plan :



Danger

La représentation graphique de la suite n'est constitué que par les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses entières : il ne faut donc pas les relier mais laisser des petites croix isolées.

2 3 Suite définie par une relation de récurrence

Exemple

Il nous faut un point de départ : posons par exemple $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Ensuite, il nous faut un petit algorithme, comme dans les dessins de maternelle...
Disons ici que chaque terme est égal à la somme des deux précédents. Calculez les 10 premiers termes de la suite.

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + 1 = 2$, $u_3 = 1 + 2 = 3$, $u_4 = 2 + 3 = 5$, $u_5 = 3 + 5 = 8$
$u_6 = 5 + 8 = 13$, $u_7 = 8 + 13 = 21$, $u_8 = 13 + 21 = 34$, $u_9 = 21 + 34 = 55$
$u_{10} = 34 + 55 = 89$.
Pouvez-vous calculer le 137ᵉ terme de cette suite [a] ?

Définition 1 - 3

suite définie par une relation de récurrence
C'est une suite dont on connaît le(s) premier(s) terme(s) et dont un terme quelconque est défini en fonction des termes précédents.

a. Cette suite est célèbre et porte le nom de « suite de Fibonacci » du surnom du mathématicien italien Leonardo PISANO(1175 - 1250). Cette suite présente d'innombrables propriétés remarquables. Fibonacci l'avait utilisée pour décrire l'évolution d'une population de lapins immortels. Plus tard, un romancier américain opportuniste a fait fortune en en parlant dans un roman portant le nom d'un autre Leonardo...

Exemple

Soit s et t les suites définies par :

$$s\ :\ \begin{cases} s_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ s_n = 1 + \frac{1}{s_{n-1}} \end{cases} \qquad t\ :\ \begin{cases} t_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ t_n = \sqrt{1 + t_{n-1}} \end{cases}.$$

Calculez les valeurs approchées à 10^{-4} près des 10 premiers termes de chaque suite.

Idée

utilisation de la touche [Ans] de la calculatrice On commence par entrer le premier terme. Par exemple pour s :

[1]

Ensuite, on utilise la touche [Ans] qui récupère le dernier résultat donné par la machine, c'est-à-dire ici 1 :

[1] [1] [Ans]

ensuite, on tape sur pour obtenir les termes suivants.

Sur un sujet de Bac, ça ressemblerait à ça :

```
Algorithme Suite récurrente version Bac :/
Variable
    n, k : entier
    S : flottant
Début
    Afficher("valeur de n ?")
    Lire(n)
    S ← 1
    Pour k de 1 à n Faire
        S ← 1 + 1/S
    FinPour
    Afficher(S)
Fin
```

On peut rêver qu'un jour cela devienne :

```
Fonction s(n : entier) : flottant
Variable
    k : entier
    S : flottant
Début
    S ← 1
    Pour k de 1 à n Faire
        S ← 1 + 1/S
    FinPour
    Retourner S
Fin
```

Pourquoi serait-ce un rêve ?
Sur Python on peut faire pareil :

```python
def s0(n):
    s = 1
    for k in range(1,n):
        s = 1 + 1/s
    return s
```

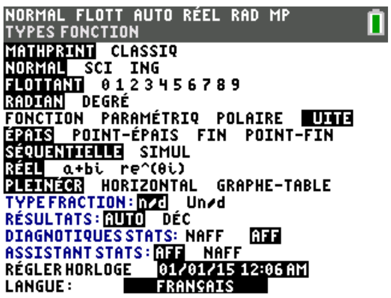
Ensuite on peut peaufiner pour le plaisir :

```python
def s(n):
    assert type(n) is int and n >= 1, 'La suite est définie pour des entiers > 0'
    if n == 1:
        return 1
    else :
        return 1 + 1 / s(n - 1)
```

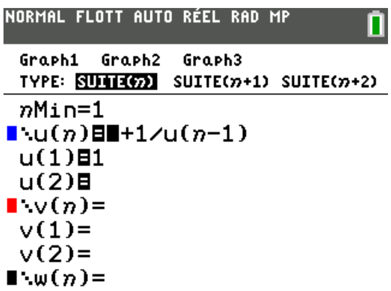
On peut obtenir quelques termes de la suite :

```
In [23]: [s(k) for k in range(1,10)]
Out[23]:
[1,
 2.0,
 1.5,
 1.6666666666666665,
 1.6,
 1.625,
 1.6153846153846154,
 1.619047619047619,
 1.6176470588235294]

In [24]: [s(k) for k in range(100,110)]
Out[24]:
[1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895]
```

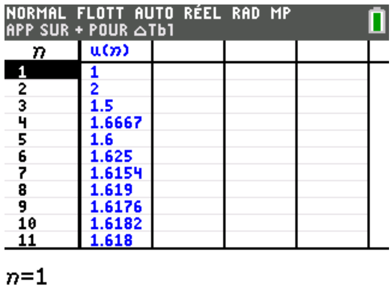
Il existe également des modes spécifiques pour étudier les suites définies par une relation de récurrence sur calculatrices. Par exemple pour la `TI-83 Premium CE` :
On tape mode puis sur la quatrième ligne on sélectionne(`Suit`)



On va ensuite sur $f(x)$.
On entre nMin=1, u(n)= 1 1 [2nde] [u_n] 1



On va ensuite sur [table] ou sur [calculs] et on choisit le rang désiré.



2 4 Suites arithmétiques et géométriques

2 4 1 Suites arithmétiques

Nous n'allons étudier que deux cas très particuliers de suites définies par une relation de récurrence.

Le premier cas concerne les suites telles que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Exemple

> Votre mamie vous donne 2 euros 50 tous les ans le 25 décembre. Vous décidez de garder précieusement cet argent dans votre chaussette préférée en vous interdisant d'y toucher pendant les soixante-quinze ans à venir.
> De quelle somme disposerez-vous après n années ?

Notons C_1 votre capital après un noël et plus généralement C_n votre capital après n noëls.

On a $C_1 = 2,5$ puis $C_2 = 5$, $C_3 = 7,5$, etc.

Avec un bon sens de l'observation, nous remarquons que

$$C_n = 2,5 \times n$$

Nous avons ainsi tout naturellement construit une *suite* de sommes d'argent qui est en fait une suite numérique de *terme général* $C_n = 2,5n$. C'est un cas particulier qui nous intéresse :

Définition 1 - 4

> **suite arithmétique**
> Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
>
> $$u_{n+1} = u_n + b$$
>
> On appelle b la raison de la suite

Dans l'exemple 1.2.4.1, si on appelle C_n le capital constitué après n années, $C_{n+1} = C_n + 2,5$ avec $C_0 = 0$: la suite (C_n) est donc une suite arithmétique de raison .... et de premier terme ....

Idée

> Comment montrer qu'une suite n'est pas arithmétique ? Par exemple, considérons la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + 1$.
> Calculons les premiers termes : $u_0 = \ldots$, $u_1 = \ldots$, $u_2 = \ldots$.
> Calculons $u_1 - u_0 = \ldots$ et $u_2 - u_1 = \ldots$. Que pouvons-nous en conclure ?

2 4 1 a Expression explicite du terme général

Observons les premiers termes d'une suite arithmétique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme a_0 et de raison r :

$$\begin{aligned}
a_0 &= & a_0 &= a_0 + 0 \cdot r \\
a_1 &= & a_0 + r &= a_0 + 1 \cdot r \\
a_2 &= & a_1 + r = (a_0 + r) + r &= a_0 + 2 \cdot r \\
a_3 &= & a_2 + r = (a_0 + 2r) + r &= a_0 + 3 \cdot r \\
a_4 &= & a_3 + r = (a_0 + 3r) + r &= a_0 + 4 \cdot r \\
a_5 &= & a_4 + r = (a_0 + 4r) + r &= a_0 + 5 \cdot r
\end{aligned}$$

Il semble se dégager que pour n'importe quel entier naturel n, on ait $a_n = a_0 + n \cdot r$
Vérifions que la suite de terme général $u_n = a_0 + n \cdot r$ est bien la suite (a_n) :

- son premier terme est $a_0 + 0 \cdot r = a_0$;
- étudions la différence de deux termes consécutifs quelconques. Soit p un entier quelconque. Calculons $u_{p+1} - u_p$.
  $u_{p+1} - u_p = a_0 + (p+1)r - (a_0 + nr) =$

Conclusion :

Théorème 1 - 1

expression explicite du terme général d'une suite arithmétique
Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme a_0 et de raison r si, et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$a_n = a_0 + n \cdot r$$

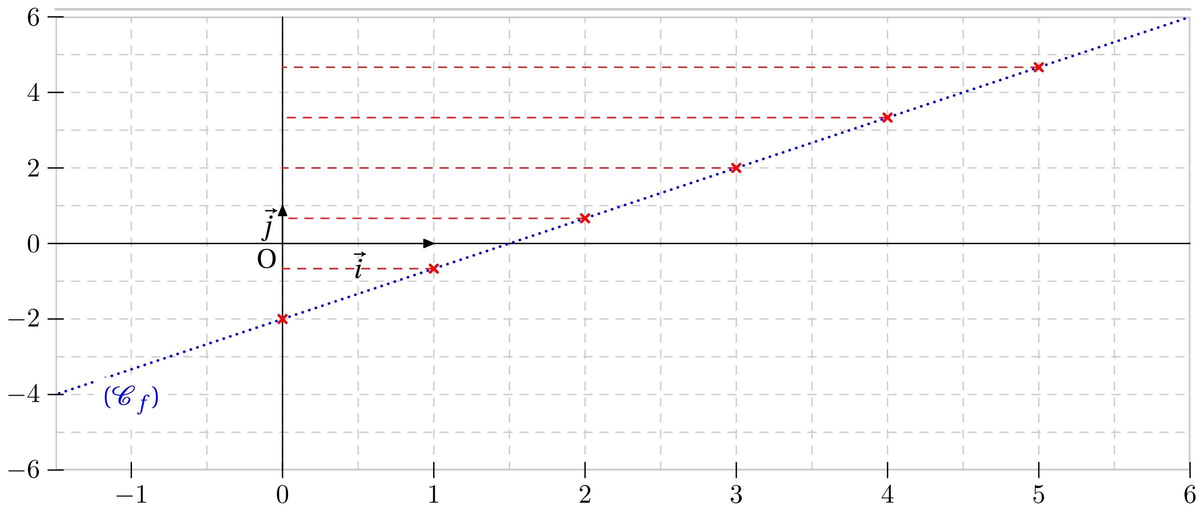
Idée

Expression du terme général en fonction d'un autre terme que celui de rang 0 Soit p un entier supérieur à un entier m.
$a_p = a_0 + p \cdot r$ et $a_m = a_0 + m \cdot r$. Alors $a_p - a_m = \ldots$
On obtient donc que $\boxed{a_p = a_n + (p-n)r}$

2 4 1 b Représentation graphique

Avec les mêmes notations, $a_n = a_0 + n \cdot r = f(n)$ avec $f \ : \ x \mapsto a_0 + r \cdot x$. La fonction f est donc une fonction affine : sa représentation graphique est une droite de coefficient directeur r.

Suite arithmétique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme -2



Théorème 1 - 2

représentation graphique d'une suite arithmétique
Les points correspondant aux termes d'une suite arithmétique sont donc alignés sur une droite de coefficient directeur la raison et d'ordonnée à l'origine le premier terme.

2 4 1 c Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Somme des n premiers entiers naturels

On veut calculer $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. La démonstration suivante a été donnée par le jeune Friedrich GAUSS à l'âge de 7 ans :

$$\begin{array}{rccccccccccc} S_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ S_n = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S_n = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

Conclusion $2S_n = \ldots$ et donc :

Théorème 1 - 3

somme des n premiers entiers naturels

La somme des entiers de 1 à n, notée $\sum_{k=1}^{n} k$, est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Avec les notations habituelles, nous voulons calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

$T_n = a_0 + a_0 + r + a_0 + 2r + a_0 + 3r + \cdots + a_0 + nr$

Combien de fois apparaît a_0 dans la somme ?

On peut d'autre part factoriser par r : just do it.

Théorème 1 - 4

somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Étant donné une suite arithmétique a de raison r

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{1er terme+dernier terme})}{2} = \frac{(n+1)(a_0 + a_n)}{2}$$

2 4 2 Suites géométriques

Nous irons plus vite ici : c'est des révisions...

2 4 2 a Définition

Définition 1 - 5

suite géométrique

Une suite (g_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_{n+1} = q \cdot g_n$$

On appelle q la raison de la suite.

2 4 2 b Expression explicite du terme général

Théorème 1 - 5

expression explicite du terme général d'une suite géométrique

Une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme g_0 et de raison q si, et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$g_n = g_0 \cdot q^n$$

2 4 2 c Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Théorème 1 - 6

somme des premiers termes d'une suite géométrique

Si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} g_k = \text{premier terme} \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} = g_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2 5 Sens de variation d'une suite

2 5 1 Le cours court

Définition 1 - 6

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est :

- strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$;
- strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Exemple

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n+1)^2$. Pour étudier les variations de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on calcule $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2(n+1)+1)^2 - (2n+1)^2 \\ &= (2n+3)^2 - (2n+1)^2 \\ &= 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1) \\ &= 8n + 8 > 0, \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

Exemple

On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = (v_n)^2 + 3v_n + 1 \end{cases}$.

Pour étudier les variations de (v_n), on va calculer $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (v_n)^2 + 3v_n + 1 - v_n \\ &= (v_n)^2 + 2v_n + 1 \\ &= (v_n + 1)^2 > 0, \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

Propriété 1 - 1

Soit u une suite à TERMES STRICTEMENT POSITIFS. Alors :

- la suite u est strictement croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$;
- la suite u est strictement décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Propriété 1 - 2

Soit f un fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et u la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Alors :

- si f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors u est croissante ;
- si f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ alors u est décroissante.

Danger

Les réciproques des deux propositions précédentes sont fausses : u peut être croissante et f ne pas l'être sur $\mathbb{R}_+$ (f peut avoir des variations quelconques entre deux entiers consécutifs). Trouvez des contre-exemples !

2 5 2 Variations autour d'un exemple

On veut étudier le sens de variation de la suite **u** définie par $u_n = n^3$.

- **En déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$**

  Pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

  Le dernier terme est strictement positif comme somme de deux termes positifs et d'un terme strictement positif.

  Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

  La suite **u** est donc strictement croissante.

Remarque

N'oubliez pas que n est positif !

- **En utilisant une fonction auxiliaire**

  La fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout entier naturel n :

$$n < n+1 \Longrightarrow f(n) = u_n < f(n+1) = u_{n+1}$$

  La suite **u** est donc strictement croissante.

- **En comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1**

  Pour tout $n \geqslant 1$ on a $n^3 > 0$ donc la suite est à termes strictement positifs à partir du rang 1.

  Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 > 1$$

  La suite est strictement croissante à partir du rang 1. Or $u_0 = 0 < 1 = u_1$ donc la suite **u** est strictement croissante.

À retenir

Quelle méthode vous paraît plus adaptée ? Une chose est sûre, la troisième demande une vérifiaction supplémentaire, la seconde ne concerne que certaines suites, la première est plus générale et permet d'utiliser nos outils d'étude du signe d'une expression.
Elles sont donc classées dans l'ordre de préférence mais si vous avez une suite définie par un produit, on préfèra la troisième et si elle est définie par une somme alors on choisira la première.

2 6 Majoration, minoration

Définition 1 - 7

Une suite **u** est **majorée** si, et seulement si, pour tout entier n, il existe un réel M tel que $u_n \leqslant M$.
Une suite **u** est **minorée** si, et seulement si, pour tout entier n, il existe un réel m tel que $u_n \geqslant m$.
Une suite **u** est **bornée** si, et seulement si, elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque

Les minorants et les majorants ne sont pas uniques.
Par exemple, pour tout entier n la suite **u** définie par $u_n = n^2$ est minorée par 0 mais aussi par -5, par $-\sqrt{\pi^{2017}} - 3$, etc.

3 Petite digression philosophique

3 1 Prenons le temps d'y penser

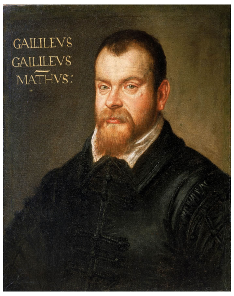
Karl Weierstrass
(1815 - 1897)

La notion d'infini a turlupiné les plus grands esprits pendant des siècles. De rudes batailles philosophico-mathématiques ont été menées de l'Antiquité à nos jours.
Même si la conception de limite est encore en évolution, celle que nous allons découvrir cette année a vu le jour en 1850 grâce au charmant Weierstrass et avait échappé à Galilée, Descartes, Pascal, Leibniz, Newton, etc. bref : du beau monde...et on vous demande d'assimiler cette notion en quelques semaines !
L'humanité ayant pris son temps pour l'acquérir, n'hésitez pas vous non plus à réfléchir calmement à ce à quoi peut ressembler un « infiniment grand » et un « infiniment petit ».
Cela vous permettra peut-être d'éviter d'écrire, comme tant d'autres lycéens, de grosses bêtises sur vos copies au moment de calculer des limites.

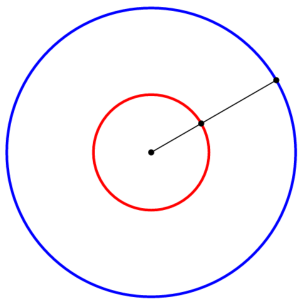
3 2 De l'Antiquité au Moyen-Âge

Zénon d'Élée
(-490 - -430)

Nous sommes coincés entre deux notions : celle d'infiniment grand et celle d'infiniment petit. C'est la deuxième qui a commencé par poser le plus de problèmes. Au V^e siècle avant JC, Zénon proposa quatre paradoxes, dont le plus célèbre est celui d'Achille et de la Tortue. Achille coure beaucoup plus vite que la tortue mais part 10 mètres derrière elle. Le temps qu'Achille franchisse ces 10 mètres, la tortue aura parcourue une certaine distance d, le temps qu'Achille franchisse cette distance d, la tortue aura parcouru une certaine distance d', etc., donc Achille mettra un temps infini à franchir ces distances de plus en plus petites mais en nombre infini !
Archimède et avant lui Démocrite réussirent à calculer les volumes de solides en « empilant » des « lamelles » planes d'épaisseurs infiniment petites. C'est ainsi qu'Archimède montra que le volume de la sphère valait $\frac{4}{3}\pi R^3$.
Concernant les rapports entre les infinis, les questions se posèrent dès le Moyen-Âge où la figure suivante permit d'affirmer qu'il y avait autant de points sur le petit cercle que sur le grand [b].



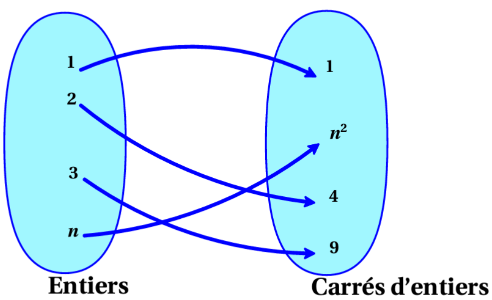
Galilée (1564 - 1642)



Ainsi, deux infiniment grands différents semblent en fait avoir le même nombre -infini- d'éléments...

3 3 Du XVI^e au XVII^e siècle

Entre deux découvertes, Galilée remarqua qu'à chaque entier naturel, on pouvait associer son carré et réciproquement qu'à chaque carré on pouvait faire correspondre sa racine carrée.



b. Les démonstrations géométriques ont longtemps été les seules démonstrations admises en mathématiques depuis les Grecs.

Il y avait donc autant d'entiers naturels que de carrés parfaits, ce qui en laissa plus d'un rêveur... Le grand LEIBNIZ lui-même refusa de *croire* que des infinis qui paraissaient de toute évidence de tailles différentes soient en fait de même taille.

Mais la plus grande des batailles se joua au sujet des infiniment petits, que CAVALIERI nomma pour la première fois *indivisibles*.

Bonaventura CAVALIERI
(1598 - 1647)

PASCAL en fit de larges commentaires. Il remarqua en effet que tout esprit admet facilement qu'une quantité puisse être augmentée à l'infini en la doublant et en réitérant le mécanisme par exemple.

En revanche il est *psychologiquement* beaucoup plus ardu d'imaginer un « infini de petitesse ».

Prenons un segment de droite et divisons-le en 2, puis encore en 2, etc. Si on admet une fin de la division nous dit Pascal, on admet l'existance d'indivisibles. Si ces indivisibles ont une étendue, il sont encore divisibles, ce qui est absurde. Mais s'ils n'ont pas d'étendue, on ne peut pas les « recoller » pour reformer la division dont ils sont issus...

Donc, Pascal arrive *indirectement* à la conclusion qu'on ne peut pas arrêter la division et qu'elle peut se répéter infiniment.

La difficulté d'appréhension vient du fait qu'on n'accède pas directement à la preuve de l'existence d'infiniment petits, mais indirectement en prouvant qu'il est impossible qu'ils n'existent pas !...

Reste à déterminer la nature de cet infiniment petit. D'une part on le considère comme négligeable devant des grandeurs *mesurables*, tout comme le point est négligeable devant la droite.

Mais il ne faut pas trop le négliger sous peine de ne pouvoir reconstituer en l'additionnant une quantité mesurable comme l'ont théorisé Leibniz et Newton avec le calcul différentiel comme nous le verrons en étudiant les dérivées et les intégrales.

Ils ont en effet eu besoin d'addditionner des infiniment petits, mais ont remarqué des résultats troublants.

Par exemple, EULER(1707 - 1783) a montré que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

mais que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \longrightarrow +\infty$$

même si dans chacun des cas on ajoute des infiniment petits.

De plus, on peut se demander que vaut

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

D'une part, $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0$, et d'autre part $1-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1$, et donc...$0 = 1$!

Bref, y a quelque chose qui cloche là-dedans, ce qui fit dire à l'Irlandais BERKELEY *ne vaut-il pas mieux donner de bonnes approximations que prétendre atteindre à l'exactitude par des sophismes ?* et donc étudier des polygones plutôt que des courbes par exemple.

Sauf qu'il faudrait alors réfuter le calcul différentiel et renoncer quasiment à tout ce qui s'est découvert en sciences depuis le XVIIe siècle !

3 4 Le XIXe siècle...enfin !

GAUSS, l'un des plus grands génies de l'Histoire n'a pas encore une vision correcte de l'infini, mais résume en fait la vision générale des limites que vous devez acquérir au Lycée : *L'infini ne doit être qu'une façon de parler pour exprimer que certaines quantités peuvent s'approcher aussi près que l'on veut d'une limite ou augmenter au delà de toute limite.*

Carl Friedrich GAUSS
(1777 - 1855)

Le grand bond de la pensée vient d'être effectué : cet infiniment petit qu'on recherchait avec tant d'ardeur depuis des siècles, cet ultime stade hypothétique, on le cherchait au mauvais endroit : on le cherchait constant alors qu'il faut le considérer comme *variable* : c'est ce que traduit le *aussi petit que l'on veut* dont parle Gauss et que va reprendre CAUCHY dans ses *Leçons sur le calcul infinitésimal* qui marque le réel envol de l'Analyse moderne.
Notre austère royaliste posa en effet *Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.*
C'est la définition utilisée en Terminale. Il existe cependant une faille dans cette définition mais qui est sans importance à notre niveau.
Il faudra attendre 1861 et Weierstraß pour obtenir une définition rigoureuse et surtout CANTOR pour explorer les réels et l'infini.
Cantor mit au point la *Théorie des Ensembles* et prouva ainsi des résultats qui défient la perception que l'on a du monde réel.
Il donna un nom au *cardinal* (c'est-à-dire au nombre d'éléments) de $\mathbb{N}$: $\aleph_0$ (qui se lit aleph zéro). Il montra qu'il s'agit du plus petit cardinal d'un ensemble infini. Comme l'avait déjà pressenti Galilée, il montra qu'il y a autant d'entiers pairs que d'entiers tout court, et donc que $2\times\aleph_0 = \aleph_0$.
Il montra ensuite qu'il y avait autant de nombres rationnels que d'entiers. Or un entier peut être représenté par un couple (numérateur,dénominateur). Il y a donc $\aleph_0 \times \aleph_0$ tels nombres et donc $\aleph_0^2 = \aleph_0$... On parle alors d'ensembles *dénombrables*, c'est-à-dire d'ensembles dont tous les éléments peuvent être reliés d'une et une seule manière à un entier naturel[c]
Est-ce pareil pour $\mathbb{R}$? Cantor montra en fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : on ne peut pas mettre un dossard sur chacun des nombre réels. Plus fort encore : il montra qu'il y a autant de nombres dans $[0\,;\,1]$ que dans $\mathbb{R}$ tout entier. Et le summum : il y a autant de nombres dans $[0\,;\,1]$ que dans l'Espace de dimension 3 tout entier !
Ce résultat rendit à moitié fou le pauvre russo-germano-danois qui affirma en parlant de ces résultats : « je le vois mais je n'y crois pas »...
Lorsqu'on vous a présenté les réels en 2^{nde}, on vous a parlé des entiers naturels, des entiers relatifs, des décimaux, des rationnels, des irrationnels. On a cependant besoin de parler d'une autre catégorie de nombres : *les nombres algébriques* qui sont les réels solutions d'une équation polynomiale à coefficients rationnels...
Par exemple, $\sqrt{2}$ est algébrique car il est solution de $x^2 - 2 = 0$. De même, $\frac{3}{2}$ est algébrique car solution de $2x - 3 = 0$.
Les nombres qui ne sont pas algébriques sont dits *transcendants*.
Cantor montra que l'ensemble des nombres algébriques est aussi dénombrable, et donc que les nombres transcendants ne sont pas dénombrables, c'est-à-dire qu'il y en a beaucoup plus...or vous ne connaissez qu'un seul de ces nombres : π ! Et on en connaît en fait très peu : il a fallu de grosses recherches à la fin du XIXe pour prouver que π était transcendant. C'est assez troublant de penser qu'on ne connaît pas la plupart des nombres réels !...

3 5 Oui...et alors ?

Votre cerveau fume ?...Bien ! Que retenir de ce passionnant exposé ? Et bien au moins que *calcul sur les limites = danger*. Les infiniment grands et les infiniment petits doivent se traiter avec la plus grande prudence et qu'il a fallu des siècles à l'humanité pour les apprivoiser. Quant à vous, je vous laisse deux semaines...
Il est maintenant temps de s'amuser un peu.

4 La somme des entiers fait le buzz

Très récemment, une bataille s'est engagée via Youtube au sujet d'un problème mathématique qui a donné lieu à des kilomètres d'échanges très virulents sur internet et concerne un peu notre chapitre sur les limites de suites.
Voici quelques liens qui témoignent de la bataille :

c. en gros, on peut accoler un dossard différent à tous...

- L'article qui fait scandale : https://sciencetonnante.wordpress.com/2013/05/27/1234567-112/
- Une mise au clair : https://sciencetonnante.wordpress.com/2014/01/20/le-scandale-des-series-divergentes/
- Une réponse sans ambiguité quoiqu'un peu difficile à suivre au niveau Terminale : https://youtu.be/IghfFlXK__U
- Une magnifique réponse mais en anglais : https://www.youtube.com/watch?v=sD0NjbwqlYw

Vous pourrez y entendre par exemple :

> *You are a mathematician, so you don't let the fact that something is nonsensical stop you*

Pendant longtemps, parler de $\sqrt{2}$ comme un nombre était une hérésie, parler de nombres négatifs vous envoyait en enfer.
Jusqu'à présent, votre prof de maths vous fouettait si vous évoquiez un carré négatif...Et pourtant cette année, vous manipulerez des nombres dont le carré vaut -37. Nous compremdrons ce que peut signifier :

$$0.999999............ = 1$$

Vos camarades de spécialité maths verront que parfois :

$$2 + 2 = 1$$

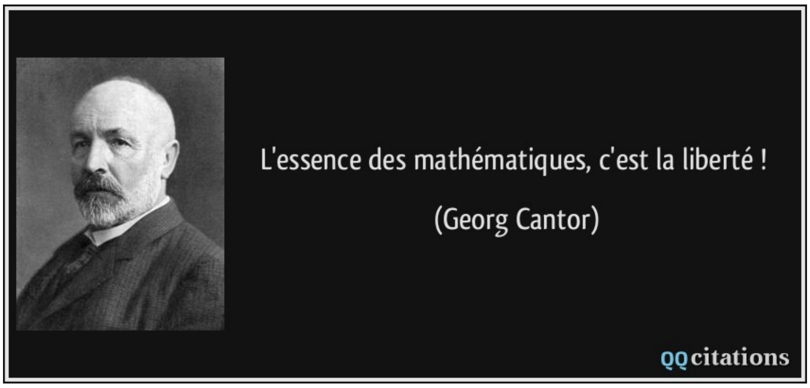
Et peut-être qu'un jour vous ne serez pas choqués de voir inscrit :

$$1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 64 + 128 + \cdots + 2^n + \cdots = -1$$

et peut-être n'avez-vous pas réalisé que sur notre planète, la somme des angles d'un triangle peut valoir 270 degrés !

Mais que cela ne vous incite pas à dire n'importe quoi. Cette année plus encore qu'auparavant, il faudra être bien précis et rigoureux et vous comprendrez peut-être pourquoi un prof de maths répond toujours par une question.

N'oubliez pas ce qu'a dit le héros de notre chapitre :



Mais revenons à notre programme de Bac...

5 Comportement asymptotique d'une suite

Le mot « asymptote » est construit à l'aide du préfixe privatif « a » et de « symptôsis » (rencontre). Étudier le comportement asymptotique d'une suite c'est déterminer ce qui se passe pour la suite là où l'on ne peut rencontrer la suite : à l'infini (nous serons un peu plus précis plus tard).
Nous avons rapidement évoqué que la notion d'infini est délicate à apréhender. Nous allons donc préciser ce que cela signfie à notre niveau.

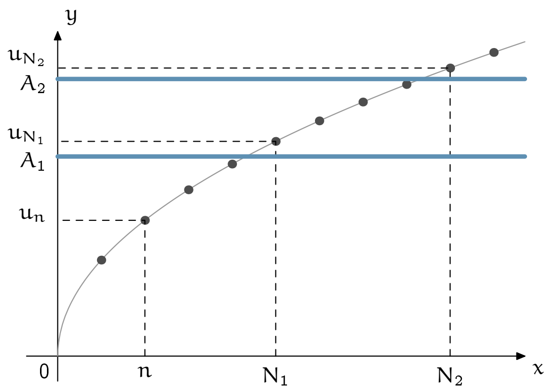
5 1 Comment traduire qu'une suite diverge vers l'infini ?

Définition 1 - 8

Suite divergeant vers l'infini

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si et seulement si , pour tout réel positif A, il existe **un** entier N tel que **pour tout** entier n supérieur à N, on a $u_n > A$. On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$



Exemple

Prenons par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = 5n^2$.
Soit A un réel positif quelconque. Nous voudrions savoir s'il existe un rang N à partir duquel les valeurs prises par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *toujours* supérieures à A.
Il s'agit donc de résoudre **dans** $\mathbb{N}$ l'inéquation

$$(I) : \ 5n^2 \geqslant A$$
$$(I) \iff n^2 \geqslant A/5$$
$$(I) \iff n \geqslant \sqrt{A/5} \text{ car } A \geqslant 0$$

Donc, dès que n sera supérieur à $\sqrt{A/5}$, on aura u_n supérieur à A. Donc, d'après notre définition, on peut dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou diverge vers $+\infty$.

Remarque

Mais attention ! $\sqrt{A/5}$ n'a aucune raison d'être un entier ! Le plus petit N est en fait le premier entier supérieur à $\sqrt{A/5}$.

Recherche

Quelle pourrait être la définition d'une suite divergeant vers $-\infty$?...Il y a plusieurs possibilités.

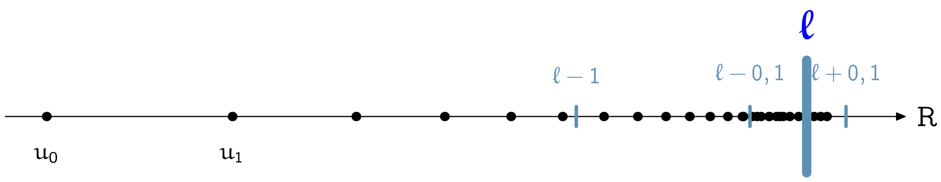
5 2 Comment traduire qu'une suite converge ?

Définition 1 - 9

Suite convergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi **tous les termes de la suite à partir d'un certain rang**. On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$



Exemple

Prenons un exemple simple : la suite de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.
On observe $v_1 = 2$, $v_2 = 3/2$, $v_{100} = 1,01$, $v_{10\,000} = 1,0001$: la suite semble converger vers 1.
Prenons un intervalle centré en 1 : il est de la forme $]1- ; 1+[$
Résolvons alors :

$$\begin{aligned}
(I_n) &: \ 1- < v_n < 1+ \\
(I_n) &\iff 1- < 1 + 1/n < 1+ \\
(I_n) &\iff - < 1/n < \\
(I_n) &\iff 0 < 1/n < \quad \text{car } n \text{ est strictement positif} \\
(I_n) &\iff n > 1/
\end{aligned}$$

Donc, quelque soit , c'est à dire quelque soit l'intervalle ouvert centré en 1 $]1-,1+[$, tous les termes v_n de la suite seront dans l'intervalle dès que n est supérieur à $1/$.

Recherche

Est-ce que toutes les suites admettent une limite, finie ou infinie ?

5 3 Croyable mais faux !

Mathémator combat les idées reçues sur les suites : une interview exclusive.

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite strictement croissante diverge forcément vers $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : une suite qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite qui diverge vers $+\infty$ est forcément croissante à partir d'un certain rang ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite bornée converge forcément vers un réel ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !

Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs converge forcément ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle va se stabiliser sur l'une d'elle. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver le *contre-exemple*.

6 Les théorèmes

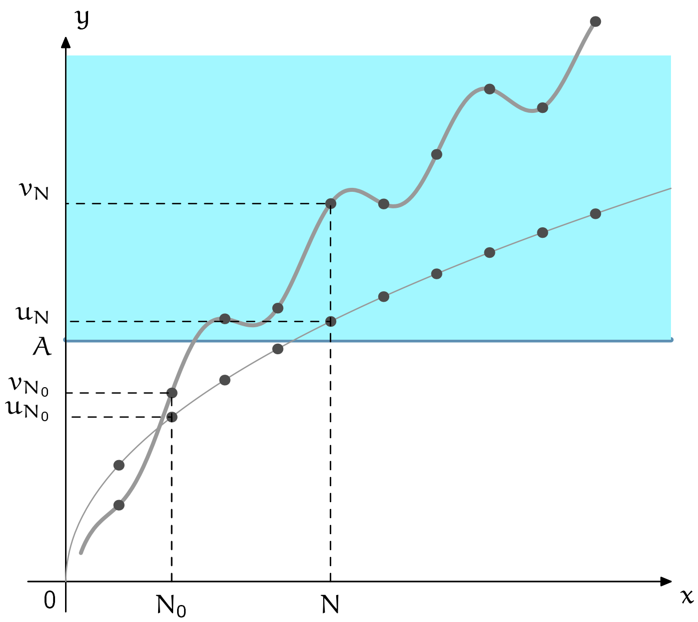
Téhessix : Je commence à m'habituer à ces définitions mais serons-nous toujours obligés d'y revenir pour calculer des limites ?

Mathémator : Rassurez-vous, dans la plupart des cas, nous pourrons utiliser les théorèmes que nous allons découvrir ensemble.
Mais avant toute chose, voici le principal théorème du cours

Théorème 1 - 7 En analyse, un dessin avant de résoudre l'exercice tu feras.

6 1 Théorème de comparaison

Mathémator : Ce théorème est résumé par le dessin suivant :



Théorème 1 - 8

Théorème de comparaison (ROC)
Soit $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$ vérifiant :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geqslant N_0$ on a $v_n \geqslant u_n$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Téhessix : En fait, ça veut dire que si on est plus grand que quelque chose qui tend vers $+\infty$, on tend soi-même vers $+\infty$.

Mathémator : C'est cela, oui, et il existe le pendant en $-\infty$ que je vous laisse imaginer. Maintenant, le dessin est bien beau, mais il s'agirait de démontrer ce résultat. Or nous n'avons que la définition de la limite en magasin, donc utilisons-la.
On veut prouver que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont au-dessus de A.

Téhessix : Et comme v_n est toujours plus grand que u_n, v_n est toujours plus grand que A et ça marche. Ah ! Ah ! Ça vous épate.

Mathémator : Je ne peux que féliciter votre enthousiasme mais...

Téhessix (à part) : *ça m'aurait étonné qu'il soit content. Vieux sadique !*

Mathémator : ...vous oubliez que notre petit dessin est un cas particulier. Il se peut que v_n soit encore plus petit que u_n au début de la « zone bleue ».

Reprenons.
Il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geqslant N_0$ on a $v_n \geqslant u_n$ mais ?

Téhessix : chais pas moi débrouillez-vous !

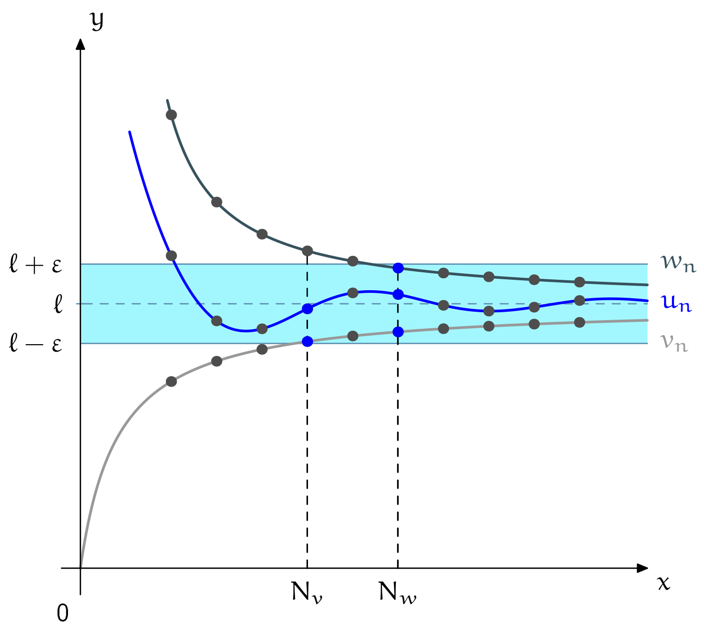
Mathémator : Vous boudez ?...Soit.
Bon, on ne sait pas qui est plus grand entre N et N_0. On va prendre le plus grand des deux pour être sûr et alors on aura les deux conditions de remplies : on aura à la fois v_n plus grand que u_n et u_n plus grand que A.
Soit $N_{\max} = \max(N_0, N)$, alors :

$$n \geqslant N_{\max} \Longrightarrow v_n \geqslant u_n \geqslant A$$

ce qui traduit bien que la suite (v_n) diverge vers $+$.

6 2 Théorème des gendarmes

Mathémator : Un nom qui fait un peut peur et qui laisse imaginer le pauvre prisonnier entouré de deux fiers à bras en uniforme. On aurait pu aussi l'appeler théorème des portes d'ascenseur, théorème de la mouche écrasée, théorème du rouleau compresseur, et j'en passe et des meilleures. Comme d'habitude, l'idée vient du petit dessin suivant



Une suite $\boldsymbol{u}$ est coincée entre deux suites $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ qui tendent vers ℓ, alors $\boldsymbol{u}$ elle-même va tendre vers ℓ. Il ne reste plus qu'à trouver un énoncé et une démonstration.

Téhessix : Je veux bien donner l'énoncé :

Théorème 1 - 9

Théorème des gendarmes
Soit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ trois suites définies sur $\mathbb{N}$ vérifiant :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$
- Il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$ on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Mathémator : Bravo ! C'est parfait.

Téhessix (à part) : *J'y crois pas ! Pas de mais ?*

Mathémator : Mais...

Téhessix (à part) : *Raaaahhhhhhhh*

Mathémator : les forces obscures ont voulu que ce théorème soit admis donc malheureusement la démonstration est hors programme.

Tehessix (à part): *Enfin une bonne nouvelle* **(tout haut)** Oh, quelle décepton !

Mathémator : Mais bien sûr, jeune disciple, je ne voudrais pas freiner vos envies alors n'hésitez pas à écrire cette démonstration à titre d'exercice.

Téhessix (à part) : *Compte là-dessus !*

6 3 Suite croissante convergente

Mathémator : Que pensez-vous d'une suite croissante et convergeant vers un nombre ℓ ?

Téhessix : Et bien je pense qu'elle a bien de la chance.

Mathémator : Ne me faites pas regretter de vous avoir choisi comme apprenti.

Téhessix : C'était pour détendre l'atmosphère. Heum. Disons que ce n'est pas possible. Au bout d'un moment, puisque la suite est croissante, elle va dépasser ℓ et continuera à s'en éloigner.

Mathémator : Selon vous toute suite croissante diverge donc vers l'infini ?

Téhessix : Je sens le piège.

Mathémator : Vous n'êtes pas le seul à y avoir succomber. Depuis 2500 ans de plus grands esprits que vous et moi ont eu du mal à appréhender ce phénomène,
Considérons un cas simple.
Vos mains sont à deux mètres de distance et vous voulez les frapper. Disons que votre main gauche reste immobile et que votre main droite s'en rapproche à 1 mètre par seconde. Calculons combien de temps il vous faudra pour que vos mains se rejoignent.
Pour cela, additionnons le temps nécessaire pour parcourir la moitié de la distance restante à chaque étape.
La main droite a deux mètres à parcourir.
Il lui faudra 1 seconde pour parcourir la moitié de ces deux mètres, puis 1/2 seconde pour parcourir la moitié du mètre restant, puis 1/4 seconde pour parcourir le 1/4 mètre restant, puis 1/8 de seconde pour parcourir le 1/8 mètre restant, etc.
Appelons T le temps nécessaire pour que vos mains se rejoignent. Alors

$$T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

On est donc amener à additionner une infinité de nombres positifs.
Appelons T_n le temps de parcours à la n-ème étape.
Par exemple $T_1 = 1$, $T_2 = 1 + 1/2$, $T_3 = 1 + 1/2 + 1/4$. Et plus généralement, que vaut T_n ?

Téhessix : À chaque fois c'est des puissances de 2. Je suis observateur, n'est-ce pas ? Donc

$$T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Mathémator : Mmmmm... Je ne voudrais pas vous décourager mais vous faire remarquer que vous allez trop vite en besogne.
$T_1 = 1$ c'est-à-dire $T_1 = 1/2^0$, $T_2 = 1/2^0 + 1/2^1$, $T_3 = 1/"^0 + 1/2^1 + 1/2^2$...

Téhessix : Ouais bon, c'était presque ça :

$$T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Si ça vous fait plaisir...

Mathémator : Soit. Quel est le sens de variation ?

Téhessix : $T_{n+1} - T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^n} > 0$
donc la suite est strictement croissante.

Mathémator : On entre donc dans le cadre qui nous intéresse donc vous ne pourrez jamais taper dans vos mains.

Téhessix : ?!

Mathémator : Heureusement les maths vont nous permettre d'applaudir.
Pensons à la ruse du petit Gauß. Écrivons :

$$\begin{aligned} T &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\ \frac{1}{2}T &= \phantom{1 + {}} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \end{aligned}$$

Téhessix : Ah oui ! Il ne reste plus qu'à soustraire :

$$\begin{aligned} T &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\ -\frac{1}{2}T &= - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \cdots \\ \hline \frac{1}{2}T &= 1 \end{aligned}$$

Waouh ! $T = 2$

Mathémator : Ce qui nous rassure car nous avons parcouru 2m en 2s à la vitesse de 2m par seconde.
Donc notre suite croissante *semble* avoir une limite finie qui est 2.
Est-ce que cela est cohérent avec notre notion de limite finie ?

Téhessix : Euh...Ah oui ! T_n se rapproche aussi près que l'on veut de 2. Il suffit d'attendre suffisamment longtemps.

Mathémator : C'est l'idée. Pouvez-vous le démontrer ?

Recherche

Démontrer que la limite de la suite (T_n) est 2 en utilisant la définition.

Mathémator : Il existe donc des suites strictement croissantes qui convergent. Nous pouvons écrire quelques théorèmes à ce sujet.

Théorème 1 - 10

Suite croissante convergente (ROC)
Si une suite est croissante et converge vers un nombre réel ℓ alors tous ses termes sont inférieurs à ℓ.

Une démonstration de ce théorème est assez subtile et pourtant c'est une ROC. Passons au tableau pour exposer cet exemple de raisonnement par l'absurde.

[Mathémator est au tableau : c'est beau]

Deux autres théorèmes vont nous intéresser.
Le premier est admis mais est extrêmement important :

Théorème 1 - 11

Théorème de la limite monotone(ADMIS)
Toute suite *croissante* et *majorée* converge.
Toute suite *décroissante* et *minorée* converge.

Le suivant est une ROC :

Théorème 1 - 12

Majorant d'une suite convergente (ROC)
Si une suite convergeant vers ℓ est majorée par un réel M alors $\ell \leqslant M$

Il existe le pendant pour les suites convergentes minorées.

Recherche

Démontrer ce théorème par l'absurde

7 Opérations sur les limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites, et L et L' sont deux réels.
Le point d'interrogation correspond à une forme indéterminée, c'est-à-dire un cas où on ne peut pas conclure directement.

7 1 Limite de la somme $u_n + v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

7 2 Limite du produit $u_n \times v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	LL'	$+\infty$ ou $-\infty$ (signe du produit)	$+\infty$ ou $-\infty$ (signe du produit)	?

7 3 Limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$+\infty$ ou $-\infty$	$L \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' \neq 0$	0	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (signe du quotient)	?	?

8 En résumé

Définition 1 - 8

Suite divergeant vers l'infini
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si et seulement si , pour tout réel positif A, il existe **un** entier N tel que **pour tout** entier n supérieur à N, on a $u_n > A$. On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Définition 1 - 9

Suite convergente
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi **tous les termes de la suite à partir d'un certain rang**. On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Théorème 1 - 8

Théorème de comparaison (ROC)
Soit $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$ vérifiant :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geqslant N_0$ on a $v_n \geqslant u_n$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Théorème 1 - 9

Théorème des gendarmes
Soit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ trois suites définies sur $\mathbb{N}$ vérifiant :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$
- Il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$ on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Théorème 1 - 10

Suite croissante convergente (ROC)
Si une suite est croissante et converge vers un nombre réel ℓ alors tous ses termes sont inférieurs à ℓ.

Théorème 1 - 11

Théorème de la limite monotone(ADMIS)
Toute suite *croissante* et *majorée* converge.
Toute suite *décroissante* et *minorée* converge.

Théorème 1 - 12

Majorant d'une suite convergente (ROC)
Si une suite convergeant vers ℓ est majorée par un réel M alors $\ell \leqslant M$

Exercices

Légende

- Objectif : Survivre
- Objectif : Bac
- Objectif : Post Bac

Première

Recherche 1 - 1

Que dire du sens de variation d'une suite arithmétique ? D'une suite géométrique ?

Recherche 1 - 2

Étudier le sens de variation de la suite **u** définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

Recherche 1 - 3

Étudier le sens de variation de la suite **u** définie par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.

Recherche 1 - 4

Étudier le sens de variation de la suite **u** définie par $u_n = n^3 - n^2$ pour $n \geqslant 0$.

Recherche 1 - 5

Étudier le sens de variation de la suite **u** définie par $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.

Recherche 1 - 6

Étudier le sens de variation de la suite **u** définie par $u_n = 2^{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.

Recherche 1 - 7

Étudier le sens de variation de la suite **u** définie par $u_n = n + \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

Recherche 1 - 8

Trouvez un moyen simple d'écrire les suites proposées sans ...

1. 1, 5, 9, 13,... **2.** 1,-2,4,-8,16,... **3.** 16000,4000,1000,250,... **4.** 1,8,27,64,...

Recherche 1 - 9

Écrivez les expression suivantes sans le symbole $\sum$:

1. $\sum_{k=1}^{5} k^2$ **2.** $\sum_{k=0}^{4} (k+1)^2$ **3.** $\sum_{k=3}^{7} (k-2)^2$ **4.** $\sum_{k=0}^{4} (5k+2)$

Recherche 1 - 10

Utilisez le symbole Σ pour ré-écrire les formules suivantes :

1. $1+4+9+16+\cdots+625$

2. $(1\times 2)+(2\times 3)+(3\times 4)+\cdots+(15\times 16)$

3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}$

Recherche 1 - 11 — D'après Bac S

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

i. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

ii. Que permet de calculer cet algorithme ?

iii. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1.4142	1.9571	1.9986	1.9999	1.9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. On admettra que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Recherche 1 - 12 — D'après Bac S

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1

Variables :

v est un réel

i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :

Lire n

v prend la valeur 1

Pour i variant de 1 à n faire

  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$

Fin pour

Afficher v

Fin algorithme

Algorithme N° 2

Variables :

v est un réel

i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :

Lire n

Pour i variant de 1 à n faire

v prend la valeur 1

  Afficher v

v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$

Fin pour

Fin algorithme

Algorithme N° 3

Variables :

v est un réel

i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :

Lire n

v prend la valeur 1

Pour i variant de 1 à n faire

  Afficher v

v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$

Fin pour

Afficher v

Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. On admettra que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

Partie B Conjecture sur l'évolution de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3. À votre avis, comment va évoluer la suite (v_n) ?

Recherche 1 - 13 Bac S

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5

Traitement	Tant que $n < 9$
	    Affecter à u la valeur ...
	    Affecter à n la valeur ...
	Fin Tant que

Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0.2063	0.1693	...	0.0102	0.0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. À votre avis, comment va évoluer la suite (u_n) ?
4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Recherche 1 - 14 **Flocon de Von Koch**

On part d'un triangle équilatéral T_0 de côté a. Chacun des côtés de ce triangle est également partagé en trois segments de mêmes longueurs.
Pour chacun des côtés, le tiers central est remplacé par les deux côtés d'un triangle équilatéral extérieur à T_0 et dont le troisiéme côté serait le tiers manquant. On obtient un polygone T_1.
On construit de la même manière T_2, T_3, etc.

1. Calculez les périmètres p_0, p_1, etc. de ces polygones. Quelle relation existe-t-il entre p_{n+1} et p_n ?
2. Prenons $a = 1$. Donner le plus petit entier n tel que $p - n \geqslant 3000000$.
3. Que pensez-vous de l'aire de ces polygones ?

Étude asymptotique de suites

Avec les définitions

Recherche 1 - 15

On considère la suite définie par $u_n = 2 + 1/n$ pour $n \geqslant 1$

- Calculer les dix premiers termes de la suite et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- Observer la représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
- On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 , c'est-à-dire $]1,99;2,01[$. Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.
- On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon r , c'est-à-dire $]2-r,2+r[$.
  Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de r , tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.
- Démontrer que (u_n) converge vers 2.

Recherche 1 - 16

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2+2}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

- Calculer les dix premiers termes de la suite et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite ?
- On considère l'intervalle $]a,+\infty[$ avec $a \geqslant 10$.
  Montrez qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de a, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.
- Montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Recherche 1 - 17

Démontrez que si une suite est convergente, alors elle est bornée.

Recherche 1 - 18 Limites des suites usuelles

Quelles pourraient être un catalogue de suites usuelles ? Quelles sont leurs limites ?

Avec les théorèmes

Recherche 1 - 19

Soit $u_n = n^2 + n$.

1. La suite est-elle géométrique ? Arithmétique ?
2. Quel est son sens de variation ?
3. Démontrer que pour tout entier n, on a $u_n \geqslant n^2$
4. En déduire la limite de u_n.
5. Par quel autre moyen aurait-on pu obtenir la limite de la suite ?

Recherche 1 - 20

Soit $v_n = n^2 - n$

1. La suite est-elle géométrique ? Arithmétique ?

2. Quel est son sens de variation ?
3. Préciser les limites des suites de terme général n^2 et n. Peut-on en déduire la limite de (v_n) ?
4. i. Justifier que, pour tout entier naturel non nul n on a $v_n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

   ii. Que peut-on en déduire pour la limite de (v_n) ?
5. Il existe une relation simple entre v_n et u_n défini dans l'exercice précédent. L'utiliser pour retrouver le résultat précédent.

Recherche 1 - 21 Même combat

Étudier les limites éventuelles des suites de terme général :

1. $u_n = -3n + 1$
2. $v_n = n^2 - 2n - 1$
3. $x_n = \frac{n^2}{n+1}$
4. $y_n = \frac{n}{n+1}$
5. $z_n = \frac{n}{n^2+1}$
6. $a_n = \frac{1-n^2}{2+n}$
7. $b_n = 3 - \frac{n^2-1}{n^2}$

BAC

Recherche 1 - 22 Bac 2017

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.
On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
   On a en particulier $s_1 = u_0$.

   i. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

   ii. En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

   iii. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.
3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.

   a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.
   b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Entrée :	Saisir n
	Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n :
	u prend la valeur ...
	s prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

4. i. Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

   ii. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

Recherche 1 - 23 **Bac 2017**

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016+n$. On a donc
$v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$
   i. Justifier que g est croissante sur $[0\,;60]$.
   ii. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.
2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
   i. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
   ii. ON ADMETTRA que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.
   Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   iii. En déduire la convergence de la suite (u_n).
   iv. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que ....
	u prend la valeur ....
	n prend la valeur ....
	Fin Tant Que
Sortie	Afficher ....

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$.

Recherche 1 - 24 **Bac 2018**

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{cases}$$

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par

$$t_n = u_n - 5.$$

Affirmation A : La suite (t_n) est une suite géométrique.
Affirmation B : Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n + 5.$$

2. Soit une suite (v_n).
Affirmation C : Si, pour tout entier naturel n supérieur à 1,

$$-1 - \frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

alors la suite (v_n) converge.
3. **Affirmation D** : Pour tout entier naturel n non nul,

$$(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \ldots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7).$$

4. Soit (w_n) une suite convergente.
Affirmation E : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.

THÈME N° 2

COMPLEXES - Épisode I

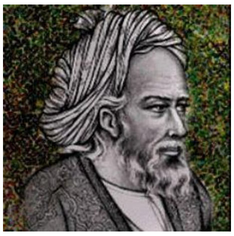
Les nombres complexes portent mal leur nom! Ils SIMPLIFIENT de nombreux domaines dans lesquels ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors commençons par parcourir le deuxième millénaire qui a vu mûrir petit à petit cette notion dans les esprits.

1 Approche historique

1 1 Les équations du second degré

Depuis plus de 3 000 ans on sait résoudre ce que l'on appelle aujourd'hui des équations du second degré. Cependant, très tôt, les Babyloniens, par exemple, sont restés bloqués au moment de résoudre des équations du troisième degré. Il faut attendre le XIe siècle pour qu'un savant perse commence à entrevoir une méthode approchée de résolution.
Toute cette section doit beaucoup aux activités proposées par Anne Boyé dans *Images, imaginaires, imaginations* paru chez *Ellipses en 1998* (pages 122-173)

1 2 Résolution géométrique de l'équation $x^3+ax=b$



Omar Khayyam
(1048-1131)

Au XIe siècle vécut en Perse Ghiyath ed-din Abdoul Fath Omar Ibn Ibrahim al-Khayyam Nishabouri, ou plutôt : غياث الدين ابو الفتح عمر بن ابراهيم خيام نيشابوری , plus connu sous le nom d'Omar Khayyam. Il fut un poète joyeux et insouciant :

> *La Roue tourne, insoucieuse des calculs des savants.*
> *Renonce à t'efforcer vainement de dénombrer les astres.*
> *Médite plutôt sur cette certitude : tu dois mourir, tu ne rêveras plus,*
> *Et les vers de la tombe ou les chiens errants dévoreront ton cadavre.*

mais aussi un mathématicien visionnaire qui, avec quelques siècles d'avance sur les savants européens, découvrit des résultats importants concernant la résolution des équations du troisième degré. Son approche est géométrique et ne permet d'obtenir qu'une approximation graphique d'une solution.
Omar ne considérait que des équations à coefficients positifs.
Nous allons par exemple nous occuper de :

$$x^3 + ax = b \qquad (E)$$

où x, a et b désignent des nombres réels positifs mais jouant des rôles différents :

- x est l'*inconnue* de l'équation ; le but du jeu est en effet de déterminer les (ou des...) nombres réels positifs qui satisfont l'équation (E) ;
- a et b sont des *paramètres* : plutôt que d'étudier séparément des équations comme $x^3+2x=1$, $x^3+x=7$, ..., Al Khayyam avait compris qu'elles pouvaient être résolues de manière similaire, quelque soit les valeurs positives prises par a et b. Les solutions de l'équation dépendront donc de ces paramètres.

Nous allons donc résoudre *qualitativement* l'équation (E).

1 2 1 Paraboles et cercles

Dans le premier quadrant d'un repère orthonormal, considérons la branche de parabole d'équation $y = \frac{x^2}{\sqrt{a}}$ et le demi-cercle passant par l'origine du repère, centré sur l'axe des x positifs et de diamètre $\frac{b}{a}$.

Recherche

> Démontrez que l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes, distinct de l'origine, est solution de (E).

1 2 2 Paraboles et hyperboles

Voyons les choses autrement :

$$(E) \iff x(x^2+a) = b$$
$$(E) \iff x^2 + a = \frac{b}{x} \quad \text{ou} \quad x = 0$$

Recherche

> Comment interpréter géométriquement ce résultat ?

1 3 La Renaissance italienne

1 3 1 Un saut dans l'espace-temps : combien l'équation x³+px+q=0 a-t-elle de solutions dans R ?

Historiquement, c'est en essayant de résoudre cette équation que les mathématiciens italiens du XVIe siècle eurent pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif. Nous qui vivons au XXIe, nous avons des outils pour dénombrer les solutions.
Considérons donc la fonction $f\ :\ x \mapsto x^3+px+q$ avec p et q des entiers. En étudiant cette fonction, nous allons vérifier qu'elle admet toujours au moins une solution réelle et même déterminer le nombre de solutions selon les valeurs de p et q.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$, le Théorème des Valeurs Intermédiaires assure l'existence d'une valeur d'annulation de f car elle change de signe [a]

Recherche

Calculez la dérivée de f.

Quel est son signe ? Distinguons deux cas :

- $\boldsymbol{p \geq 0}$: alors la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc f ne s'annule qu'une fois.
- $\boldsymbol{p < 0}$: alors la dérivée s'annule en deux valeurs opposées $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ que nous appellerons a et $-a$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

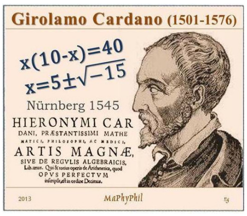
x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-a)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Maintenant, il faudrait connaître les signes respectifs de $f(-a)$ et $f(a)$ pour savoir si f s'annule sur les intervalles $]-\infty, a]$, $[-a, a]$ et $[a, +\infty[$.

Recherche

Montrez que $f(a) = q - 2a^3$ et $f(-a) = q + 2a^3$ en utilisant le fait que $f(a) = 0$.
Que vaut $f(a) \cdot f(-a) = ?$
Pourquoi a-t-on $f(a) < f(-a)$?
Entamez alors la discussion en distinguant trois cas (*Si $f(a)$ et $f(-a)$ sont tous deux de même signe, c'est à dire si $f(a) \cdot f(-a) > 0$ soit encore si $4p^3 + 27q^2 > 0$ alors f ne s'annule qu'une seule fois et...*)

1 3 2 Résolvons ces équations



Girolamo CARDANO
(1501-1576)

Plaçons-nous maintenant dans le cas $4p^3 + 27q^2 > 0$. Nous savons qu'alors l'équation admet une unique solution réelle.
Giralomo CARDANO a établi en 1547 que cette solution est

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x = u + v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v.

Recherche

Utilisez cette formule pour trouver une solution de $(E_1)\ :\ x^3 - 36x - 91 = 0$

On voudrait faire de même avec $(E_2)\ :\ x^3 - 15x - 4 = 0$. Un problème apparaît...

a. comme nous le verrons dans un prochain chapitre mais l'idée paraît naturelle !...

Recherche

Admettons qu'on puisse prolonger les calculs usuels aux racines carrées de nombres négatifs en utilisant le « symbole » $\sqrt{-1}$.
Utilisons alors la formule de notre ami italien.

Bon, on ne semble pas très avancé. Alors un petit coup de pouce :

Recherche

calculez $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$

On trouve alors une solution réelle α de (E_2). Or $4p^3+27q^2$ est négatif, donc on devrait trouver deux autres racines réelles. Comme on en a une, cela veut dire qu'on peut factoriser $x^3-15x-4$ par $x-\alpha$.

Recherche

Faites-le !
Déduisez-en les deux autres solutions réelles.

Ainsi, à partir de ces travaux, les mathématiciens ont eu l'idée de prolonger les calculs algébriques aux expressions comportant des racines carrées négatives. Il faudra attendre le XIXe siècle pour que ces nombres « qui ne faisaient que passer » aient droit de cité et soient étudiés rigoureusement. Il faudra attendre la même époque pour que le héros romantique Évariste Galois propose une étude théorique des équations de degré supérieur à 2, mais ceci est une autre histoire...

1 4 Descartes et les imaginaires

René Descartes
(1596-1650)

Presqu'un siècle après Cardano, Bombelli e tutti quanti, cette racine carrée de −1 continue (et continuera) de faire peur.
Voici ce qu'écrit Descartes en 1637

> *Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement* **imaginaires** *; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ay dit en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine ; comme encore qu'on puisse imaginer trois eb celle-ci $x^3-6xx+13x-10=0$, il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2 ; et pour les autres, quoy qu'on les augmente, ou diminuë, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires.*

Recherche

Résolvez l'équation proposée par Descartes en tenant compte du renseignement qu'il donne.

1 5 Une notation malheureuse

Leonhard Euler
(1707-1783)

En 1774, le mathématicien suisse Leonhard Euler remarque que la notation $\sqrt{-1}$ peut prêter à confusion.
En effet, dans le cas où *a est un nombre positif*, vous avez appris que $\sqrt{a}$ *désigne le nombre positif dont le carré vaut a*.
Cela se traduit par l'égalité :

$$\text{Pour tout réel positif } a,\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Recherche

- Vous avez de même établi que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$. Sauriez-vous le démontrer en utilisant la définition rappelée ci-dessus ?
- Si l'on généralise cette dernière règle à tous les réels, à quoi devrait être égal :
  - $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$?
  - $\left(\sqrt{-1}\right)^2$?
- Qu'en pensez-vous ?
- Calculez de même $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$ de deux manières différentes.

Pour pallier à ces contradictions, EULER décide de désigner ce nombre $\sqrt{-1}$ par la lettre i (i comme...).
Ainsi :

$$i^2 = -1$$

Cette notation ne sera pas adoptée tout de suite mais c'est elle dont l'usage est largement répandue de nos jours et que nous utiliserons.

Recherche

À l'aide de cette notation, écrivez le plus simplement possible les nombres qui ont pour carré -25 ; -2 ; $-\sqrt{3}$

1 6 Une représentation géométrique des nombres

1 6 1 Une même idée jaillie de trois esprits indépendants

Il vous est naturel de représenter des nombres sur une droite graduée, de visualiser ce que peut être un nombre négatif, l'addition de deux nombres mais cela nous cantonne à nous promener sur une droite.
D'un autre côté, les nombres, depuis l'antiquité, ne trouve leur validité auprès des mathématiciens (et aussi de leurs élèves) que si on peut les « construire ».
Or, voilà que l'espace mathématique est de plus en plus envahi par ces nombres imaginaires qui continuent à tordre les esprits car on ne peut pas les « voir ».

Jean-Robert ARGAND
(1768-1822)

Alors que les plus grands esprits depuis trois siècles essayent de donner vie à ces nouveaux nombres fort utiles, la lumière va venir en 1799 d'un modeste arpenteur-géomètre danois inconnu de tous (et qui le restera car il va publier son mémoire en danois et sera donc peu lu pendant un siècle avant d'être enfin traduit !), Caspar WESSEL , et presque simultanément (1806) d'un tout aussi modeste libraire suisse installé à Paris, Jean-Robert ARGAND, et enfin d'un prêtre français exilé en Angleterre et mathématicien amateur, Adrien-Quentin BUÉE.
Leurs résultats ne seront acceptés que lorsqu'ils seront re-découverts par des savants illustres dont le brillantissime GAUSS.

1 6 2 Les Français rationnels

Pour les deux francophones, il s'agissait de trouver une signification géométrique plausible pour ces nombres.

Recherche

Considérez un triangle EIA quelconque et soit K le projeté orthogonal de E sur [IA]. Montrez que

$$KA \cdot KI = KE^2$$

M. ARGAND nous demande alors de considérer un cercle de centre K, de diamètre [IA] et tel que E soit l'image de A par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On associe à K le nombre 0, à A le nombre 1. Il est alors naturel d'associer à I le nombre -1.

Recherche

Quel nombre peut-on associer à E ?

1 6 3 Le Danois pratique

L'arpenteur WESSEL a lui une vision plus dynamique : il veut représenter des directions par des nombres, non plus sur une droite seulement (positifs et négatifs) mais sur un plan (le plan des cartes qu'il doit dessiner !).
Laissons-le parler :

> *Le présent essai a pour objet la question de savoir comment la direction doit être représentée analytiquement, c'est-à-dire comment on devrait exprimer les segments de droites, si l'on voulait, au moyen d'une équation unique et entre un segment inconnu et d'autres segments donnés, trouver une expression représentant à la fois la longueur et la direction du segment inconnu.*

Recherche

Petite pause : comment appelleriez-vous ces fameux segments orientés dont parle l'auteur ?

> *[..] Essayons donc de généraliser la signification des opérations : n'en bornons pas, comme on l'a fait jusqu'à présent, l'usage aux segments de droite de même sens ou de sens opposés [...]. Si en même temps qu'on prend cette liberté, on respecte les règles ordinaire des opérations, on ne tombe point en contradiction avec l'ancienne théorie des nombres, mais on la développe seulement, on s'accommode à la nature des quantités et on observe la règle générale qui commande de rendre, petit à petit, plus aisé à comprendre une théorie difficile.[...] Par là précisément [...] non seulement on réussit à éviter toutes les opérations impossibles et à expliquer ce paradoxe qu'il faut quelquefois avoir recours à l'impossible pour expliquer le possible, mais encore on parvient à exprimer la direction des segments de droite situés dans un même plan d'une manière aussi analytique que leur longueur. Or il faut convenir que la démonstration générale de théorèmes géométriques devient souvent plus facile lorsqu'on sait exprimer la direction d'une manière analytique et la soumettre aux règles des opérations algébriques, que lorsqu'on est réduit à la représenter par des figures qui ne sont applicables qu'à des cas particuliers.* [b]

Voici résumé par un homme de terrain en quelques phrases ce qu'il faut comprendre sur ces nouveaux nombres qui sont l'objet de notre étude.

Recherche Commentez ce court extrait de l'introduction de l'essai de WESSEL.

1 6 4 Somme des nombres imaginaires

Voici comment WESSEL présente son addition de segments orientés :

> *L'addition de deux segments se fait de la manière suivante : on les combine en faisant partir l'un d'un point où l'autre se termine ; puis on joint par un nouveau segment les deux bouts de la ligne brisée ainsi obtenue.* [c]

Recherche Ça vous rappelle quelque chose ? Que pensez-vous des termes utilisés ?

1 6 5 Produit de nombres imaginaires

WESSEL établit les règles suivantes :

> *[...]*
>
> - *Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité ;*
> - *En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit [...] dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs.*
>
> *Désignons par* $+1$ *l'unité rectiligne, par* $+\epsilon$ *une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine : alors l'angle de direction de* $+1$ *sera égal à 0°, celui de* -1 *à 180°, celui de* $+\epsilon$ *à 90°et celui de* $-\epsilon$ *à -90°ou à 270°; et selon la règle que l'angle de direction du produit est égal à la somme de ceux des facteurs, on aura :*
>
> $(+1)\cdot(+1) = +1,\ (+1)\cdot(-1) = -1,\ (-1)\cdot(-1) = +1,\ (+1)\cdot(+\epsilon) = +\epsilon,\ (+1)\cdot(-\epsilon) = -\epsilon,$
> $(-1)\cdot(+\epsilon) = -\epsilon,\ (-1)\cdot(-\epsilon) = +\epsilon,\ (+\epsilon)\cdot(+\epsilon) = -1,\ (+\epsilon)\cdot(-\epsilon) = +1,\ (-\epsilon)\cdot(-\epsilon) = -1.$
>
> *Il en résulte que* ϵ *est égal à* $\sqrt{-1}$ *et que la déviation du produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en contradiction avec aucune des règles d'opérations ordinaires.* [d]

b. Caspar WESSEL, *Essai sur la représentation analytique de la direction*, pp 3-5 de la traduction française disponible sur Gallica http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99681g.r=caspar+wessel.langFR
c. Ibid page 7
d. Ibid page 9

Recherche

Illustrez par des schémas ce qui est clairement exposé par WESSEL.

On peut donc représenter un nombre à l'aide d'une « longueur » et d'une « déviation » (que nous appellerons bientôt *module* et *argument*).

Recherche

Dans un repère orthonormal orienté, représentez les nombres « impossibles » suivant les préconisations de WESSEL :

- z_1 : $\left[2, \frac{\pi}{2}\right]$
- z_2 : $\left[2, \frac{4\pi}{3}\right]$
- z_3 : $\left[\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$
- z_4 : $\left[\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$
- z_5 : $\left[2, \frac{\pi}{2}\right]$
- z_6 : $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$
- z_7 : $\left[2, \frac{3\pi}{2}\right]$
- z_8 : $\left[1, \frac{5\pi}{2}\right]$
- z_9 : $\left[\frac{2}{3}, \pi\right]$
- z_{10} : $\left[\frac{3}{2}, 2\pi\right]$

Calculez ensuite le produit deux à deux des six premiers nombres en présentant vos résultats dans un tableau.

Construisez les « images » de $z_3 \cdot z_6$ et $z_1 \cdot z_3$.

Résolvez les deux équations suivantes :

$$(E_1) \ : \ \left[\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cdot z = \left[3, \frac{\pi}{12}\right] \qquad (E_2) \ : \ \left[2, \frac{\pi}{3}\right] \cdot z = \left[1, \frac{\pi}{6}\right]$$

Écrivez la suite des puissances entières successives de $\left[1, -\frac{\pi}{3}\right]$.
Faites de même avec $[r, \theta]$. Des commentaires ?

1 7 Gauss : clair et génial

Beaucoup de légendes circulent au sujet de Carl Friedrich GAUSS, fils d'un modeste jardinier, qui aurait commencé sa carrière mathématique très tôt en donnant instantanément à dix ans la somme des termes d'une suite arithmétique très compliquée, aurait dit « dites lui d'attendre un moment que j'aie fini » alors qu'on lui annonçait que sa femme se mourrait au milieu d'une de ses démonstrations. Sa devise était *pauca sed matura* ce qui explique qu'il ait publié des résultats bien des années après en avoir eu l'intuition.

Ceci étant, il donna dans sa thèse de Doctorat parue en 1799 une première démonstration de ce qu'on appellera ensuite le *théorème fondamental de l'algèbre*, à savoir que toute équation de degré n a n solutions pouvant s'écrire sous la forme $a + ib$ avec a et b des nombres réels et i le fameux nombre dont nous parlons depuis le début de ce cours.

Il appellera plus tard (1831) l'ensemble de tous ces nombres *ensemble des nombres complexes*, les opérations valables dans $\mathbb{R}$ se prolongeant dans cet ensemble comme nous l'avons découvert dans les paragraphes précédents.

Recherche

Essayez d'écrire les nombres suivant sous la forme $x + iy$ avec x et y des nombres réels et i le nombre de carré -1 :
$(3+5i)+(9-2i)$; $(3-4i)-(-1+i)$; $(a+bi)+(c+di)$; $4(2+7i)$; $(4+3i)(2+i)$
$(-2-i)(3+2i)$; $(a+bi)(c+di)$; $(a+ib)^2$; $(a+ib)(a-ib)$

Douze ans plus tard, il évoque dans une lettre au mathématicien Friedrich BESSEL un résultat qu'il ne publiera qu'en 1831 :

> *De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où, chaque point déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité a + bi. Le passage se fait par conséquent suivant une ligne, et peut donc s'effectuer d'une infinité de manières.*

Recherche

Que vous rappelle l'idée exposée par GAUSS ?
Dans le plan muni d'un repère orthonormal, placez les points correspondant à :

$$1\ ;\ i\ ;\ -i\ ;\ 2-i\ ;\ 1+i\ ;\ 3-2i\ ;\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

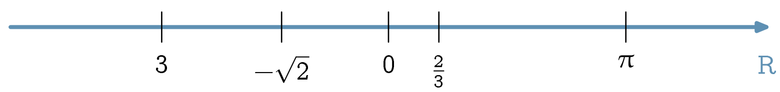
Les nombres réels sont-ils des nombres complexes ? Sur quelle partie du plan complexe se représentent-ils ? Quelle propriété caractérise les nombres représentés sur l'axe des ordonnées du plan complexe ?
Comment peut-on rapprocher les formulations $[r,\theta]$ et $a+ib$?

Pour finir, une dernière citation de GAUSS qui nous permettra de méditer sur les aléas du progrès scientifique :

> *Jusqu'à ce jour on avait surtout discuté sur la théorie des nombres complexes d'un mauvais point de vue, on avait senti une obscurité mystérieuse. Mais la raison de ceci est en grande partie due à une dénomination maladroite. Si on n'avait pas caractérisé $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ par unité positive, négative, imaginaire (ou plus fort impossible), mais par unité directe, inverse et latérale, l'obscurité mentionnée n'aurait pas surgi.*

2 Approche « moderne »

Mathémator : Vous savez « compter en dimension 1 », c'est à dire additionner et multiplier des nombres réels qu'on peut représenter sur la droite des réels :



Faute d'outils plus rigoureux[e], on vous a présenté en classe de seconde l'ensemble des nombres réels comme étant l'ensemble des abscisses des points de la droite orientée ci-dessus.
Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication, sans trop vous poser de questions. Rappelons quelques propriétés[f] :

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\cdot 1=1\cdot x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait décoler de l'axe des réels et faire le même travail en dimension 2, c'est-à-dire pouvoir calculer avec des couples de nombres du style (x,y).

Téhessix : Ça veut dire qu'on travaille maintenant sur le plan tout entier ?

Mathémator : C'est ça. On note $\mathbb{R}^2$ cet ensemble : l'ensemble des coordonnées des points du plan ! Est-ce qu'on peut définir une addition et une multiplication qui engloberaient et généraliseraient celles vues dans $\mathbb{R}$?

Téhessix : Ben pour l'addition, on fait $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$.

Mathémator : Pourquoi pas ! Vérifions que les propriétés de l'addition sont vérifiées.

Téhessix : On a un élément neutre : (0,0) car $(x,y)+(0,0)=(x+0,y+0)=(x,y)$.

e. Vous les verrez peut-être un jour...Il y a plusieurs manières de construire l'ensemble $\mathbb{R}$. Presque toutes définissent un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

f. Ces propriétés donnent à $\mathbb{R}$ une structure de *corps* : au temps préhistorique des mes années de collège, cette notion algébrique de corps était vue en 4e et maintenant en math sup. On comprend pourquoi tant de vos parents ont été effrayés par les mathématiques...

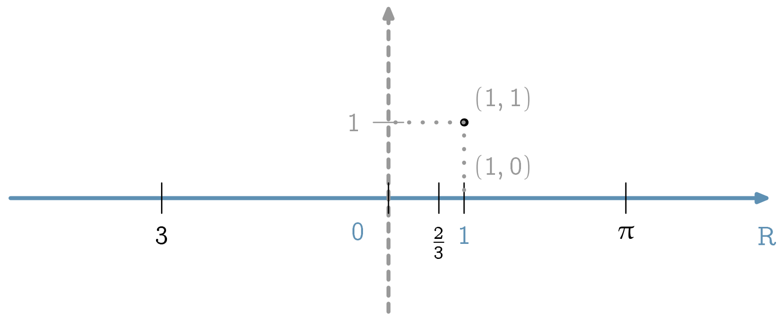
Mathémator : Et surtout l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ se situe « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$: on l'a juste « gonflé » d'un deuxième zéro pour être reconnu dans $\mathbb{R}^2$.

Téhessix : Et pour le symétrique, on prend $(-x,-y)$ car $(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$ l'élément neutre.

Mathémator : En effet. Et pour la multiplication ?

Téhessix : Ça doit être pareil : $(x,y)\cdot(x',y')=(xx',yy')$ avec $(1,1)$ comme élément neutre.

Mathémator : Pourquoi pas, mais dans ce cas, l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}^2$ ne serait pas « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$



On voudrait plutôt un élément neutre (1,0) et donc que $(x,y)\cdot(1,0)=(x,y)$. Je vous propose la multiplication suivante

$$(x,y)\cdot(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$$

Téhessix : Fichtre ! Essayons : $(x,y)\cdot(1,0)=(x\cdot 1-y\cdot 0, x\cdot 0+y\cdot 1)=(x,y)$. Ça marche.

Mathémator : Je vous laisse vérifier que cette multiplication est distributive sur l'addition et que tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0,0)$ admet un inverse

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Téhessix : Je suis impressionné par ce petit exposé, mais je ne vois pas trop le lien avec le $\sqrt{-1}$ du paragraphe précédent.

Mathémator : Et bien observez $(0,1)$ et élevez-le au carré.

Téhessix : Allons-y : $(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)$, bon et alors ?

Mathémator : Alors $(-1,0)$, c'est le réel -1 « gonflé ». Donc $\sqrt{-1}$ a un « représentant » dans $\mathbb{R}^2$. Dans le plan, il correspond au point de coordonnées $(0,1)$. Et donc nous allons pouvoir calculer avec ce fameux nombre $\sqrt{-1}$ assez naturellement en utilisant les opérations décrites précédemment.

Téhessix : Naturellement, c'est beaucoup dire ! C'est un peu compliqué comme multiplication.

Mathémator : Je vous l'accorde. C'est pourquoi nous allons adopter une autre tactique. À chaque élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ nous allons faire correspondre un nombre qu'on qualifiera de *complexe*. L'idée vient de l'observation *intuitive*[g] :

$$(x,y) \rightsquigarrow x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1) \rightsquigarrow x\cdot 1+y\cdot\sqrt{-1} \rightsquigarrow x+y\sqrt{-1}$$

Nous allons même donner un nom à ce $\sqrt{-1}$: appelons-le i pour qu'il fasse moins peur. Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc} \text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+iy \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{Le plan } P & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres complexes} \end{array}$$

g. Les $\rightsquigarrow$ renvoient à une notion extrêmement importante et rigoureuse : la notion d'*isomorphisme*. Deux ensembles sont isomorphes lorsqu'il existe une bijection entre les deux et que cette bijection « conserve » les opérations. Cela permet de travailler *à isomorphisme près* sur un ensemble compliqué en le remplaçant par un ensemble isomorphe plus approprié à la situation. C'est ce qui se passe entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$.. Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prolongeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

Téhessix : Si vous le dites : $(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$, mais en plus simple.

Téhessix : Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$

Mathémator : N'oubliez pas que $i^2 = -1$

Téhessix : Alors $(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)\cdot(x',y') = (xx'-yy',xy'+yx')$.
Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres réels un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

Si vous avez compris ces relations, tout ce qui va suivre va vous paraître « trop » simple....

3 Vocabulaire et premières propriétés

Théorème 2 - 1

Ensemble $\mathbb{C}$
On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$
- tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

3 1 Forme algébrique

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.
Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathrm{Re}(z)$
Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathrm{Im}(z)$

Danger

$\mathrm{Im}(z)$ est un nombre réel.

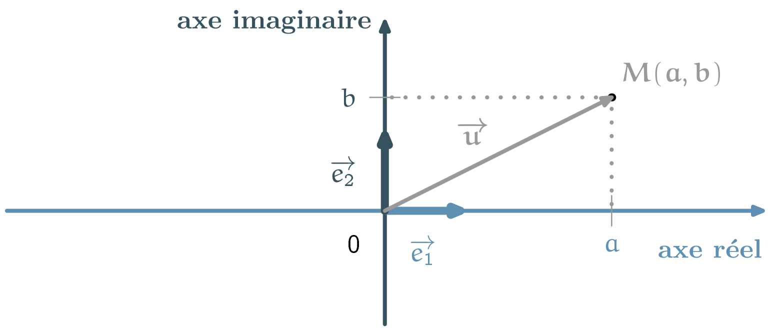
Aparté

À quoi sert l'unicité de la forme algébrique ?
Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat $2x+3y-5+i(7x-32y+1) = 0$ avec x et y des réels. Et bien le membre de gauche est une forme algébrique puisque de la forme réel + i·réel. Or la forme algébrique de 0 est $0+i\cdot 0$.
Ainsi, une équation complexe revient à deux équations réelles (bienvenue dans la deuxième dimension...) et donc

$$2x+3y-5+i(7x-32y+1) = 0 \iff \begin{cases} 2x+3y-5 = 0 \\ 7x-32y+1 = 0 \end{cases}$$

3 2 Le plan complexe

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$



À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M de coordonnées (a, b) qu'on appelle **image** de complexe $z = a + ib$. On le note souvent $M(z)$.
Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (a, b), on associe son **affixe** $z = a + ib$ qu'on note souvent z_M.
Enfin, à tout vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ de coordonnées (a, b) dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est associé une affixe $z_{\overrightarrow{u}} = a + ib$

3 3 Premiers calculs géométriques

- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a, b) et (a', b'), alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a + a')\overrightarrow{e_1} + (b + b')\overrightarrow{e_2}$, donc

Propriété 2 - 1

affixe d'une somme

$$z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$$

- De même, si λ est un nombre réel

Propriété 2 - 2

affixe du produit par un réel

$$z_{\lambda\overrightarrow{u}} = \lambda z_{\overrightarrow{u}}$$

- Alors, si I est le **milieu** du segment $[A, B]$, on a

Propriété 2 - 3

affixe du milieu

$$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

- Pour tous points A et B

Propriété 2 - 4

affixe d'un vecteur

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

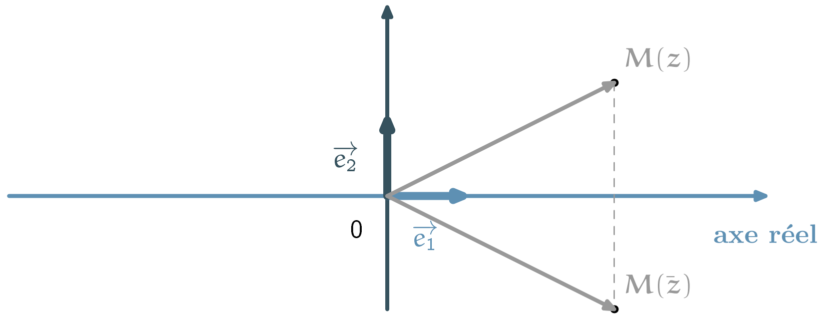
3 4 Conjugué d'un complexe

Définition 2 - 1

Conjugué
On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre

$$\overline{z} = a - ib$$

Géométriquement cela donne



Je vous laisse prouver les propriétés immédiates suivantes :

Propriété 2 - 5

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

3 5 À quoi servent les conjugués ?

3 5 1 À montrer qu'un complexe est un réel

En effet, si on arrive à montrer que $\overline{z} = z$, alors on en conclut que z est réel. **Pourquoi ?**

3 5 2 À rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques

En effet,

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

Exemple

Ainsi, pour obtenir la forme algébrique de l'inverse de $2 + i$:
$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

3 6 Conjugué de l'inverse

Sachant qu'un complexe non nul z admet une forme algébrique $a+ib$, on sait maintenant trouver la forme algébrique de son inverse :

et donc $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$

3 7 Module d'un nombre complexe

Définition 2 - 2

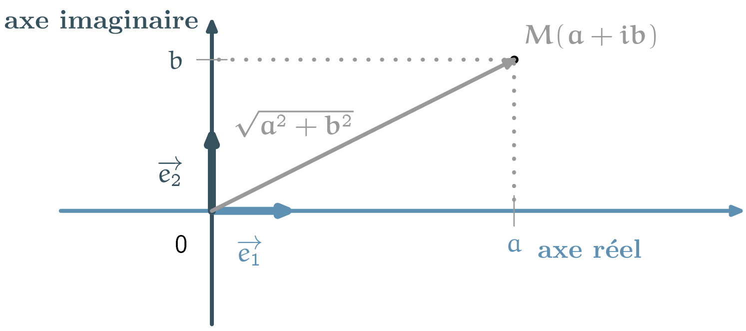
Module
Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que

$$|z| = \sqrt{z\ \overline{z}}$$

Remarque

- Cette définition en est bien une car $z\ \overline{z} = a^2 + b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
- Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.
  La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

3 7 1 Interprétation géométrique



Nous venons de voir que, si $z = a + ib$, alors

Propriété 2 - 6

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Or, qu'est-ce que $\sqrt{a^2 + b^2}$ si ce n'est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ ou encore la longueur OM.

Propriété 2 - 7

$$|z_M| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM \qquad \left|z_{\overrightarrow{u}}\right| = \|\overrightarrow{u}\|$$

3 7 2 Propriétés des modules

Je vous laisse prouver les propriétés suivantes

Propriété 2 - 8

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| =$
- $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$
- $\mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$

La propriété suivante mérite une petite aide à la démonstration

Propriété 2 - 9

Inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

C'est à dire, pour aller de Nantes à Montaigu, il est plus long de passer par Bratislava que de suivre la RN 137.
Pour les curieux, voici comment cela se démontre.

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.
Or $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2$
D'autre part $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2\,|z_1 z_2| + |z_2|^2$
Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».
Or $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2Re\left(z_1 z_2\right) \leqslant 2\,|z_1 z_2|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2\,|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

4 Résolution d'équations du second degré

4 1 Racine carrée d'un nombre complexe

L'objet de cette section est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \alpha$

4 1 1 Racine carrée d'un nombre réel

On suppose ici que α est un réel.

$\boxed{\alpha \geqslant 0}$ alors $z^2 = \alpha \iff z^2 - \alpha = (z - \sqrt{\alpha})(z + \sqrt{\alpha}) = 0$. Les solutions [h] sont donc $\pm\sqrt{\alpha}$

Exemple

On connaît : $z^2 = 4 \iff z = -2$ ou $z = 2$

$\boxed{\alpha < 0}$ alors $z^2 = \alpha \iff (z - i\sqrt{-\alpha})(z + i\sqrt{-\alpha}) = 0$. Les solutions sont donc $\pm i\sqrt{-\alpha}$

Exemple

C'est la nouveauté : $z^2 = -4 \iff z = -2i$ ou $z = 2i$

4 1 2 Racine carrée d'un complexe non réel

Les choses se compliquent ! Nous allons traiter un exemple pour ne pas vous faire (trop) peur.

Exemple

Cherchons les racines carrées de $4 + 3i$, à savoir les nombres $a + ib$ tels que

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 4 + 3i$$

Par unicité de la forme algébrique on obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 4 \\ a^2 + b^2 & = & 5 \\ 2ab & = & 3 \end{cases}$$

Ainsi $a^2 = 9/2$ et $b^2 = 1/2$, donc $a = \pm 3\sqrt{2}/2$ et $b = \pm\sqrt{2}/2$, or $2ab = 3$, donc a et b sont de même signe.

Les solutions sont donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3 + i)$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3 + i)$

4 2 Résolution de ax²+bx+c=0 avec a, b et c des réels

C'est comme en 1[ère] :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

Tout dépend donc du signe de $b^2 - 4ac$, puis on utilise les résultats de la section précédente.

Théorème 2 - 2

Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$. Notons

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

le **discriminant** de l'équation et δ un *complexe* vérifiant

$$\delta^2 = \Delta$$

- Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles $x = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$

$$\boxed{\text{Dans tous les cas } x = \frac{-b \pm \delta}{2a}}$$

h. LA solution si $\alpha = 0$

EXERCICES

Énigmes historiques

Recherche 2 - 1 Résolution d'une équation de degré 3

On veut résoudre l'équation :

$$(E)\ :\ x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$$

par la méthode de Cardan.

a. Soit a un réel et $X = x - a$. Déterminez a pour que les solutions de (E) soient les solutions d'une équation de la forme $X^3 + pX + q = 0$.

b. Résoudre cette nouvelle équation d'inconnue X et en déduire les solutions de (E).

Recherche 2 - 2 Leibniz se trompe !

Une des conséquences du théorème fondamental de l'algèbre démontré par Gauss est de pouvoir affirmer que tout polynôme dont les coefficients sont réels peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.
En 1702, le grand Leibniz conjecture pourtant que ce résultat est faux en proposant les égalités suivantes avec a un réel et le fameux $\sqrt{-1}$ que nous n'utilisons plus :
$X^4 + 1 = \left(X^2 - \sqrt{-1}\right)\left(X^2 + \sqrt{-1}\right)$
$= \left(X + \sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(X - \sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(X + \sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(X - \sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$
Que pensez-vous des solutions de l'équation $X^4 + 1 = 0$?
Leibniz affirme alors que, quels que soient les deux facteurs qu'on regroupe, cela ne donnera jamais un facteur réel.
Cette utilisation du symbole $\sqrt{\ }$ est décidément trompeuse. Menez l'enquête en évitant les $\sqrt{\ }$ et en utilisant plutôt i.

Exercices stakhanovistes

Recherche 2 - 3 Puissances de i

Exprimez chacun des nombres suivant comme un élément de l'ensemble $\{-1, +1, -i, +i\}$:

a. i^3
b. i^4
c. i^6
d. i^9
e. i^{16}
f. i^{32}

Recherche 2 - 4 Formes algébriques

Écrivez les nombres suivant sous forme algébrique :

a. $i^8 + 3i^7$
b. $(3+2i)+(5-i)$
c. $(6-i)+(4-3i)$
d. $(-2+3i)+(6-4i)$
e. $(-2-i)+(-1+7i)$
f. $(a+ib)+(c+id)$
g. $(6-2i)-4$
h. $(a+ib)-(2-3i)$
i. $(3+i)(2+4i)$
j. $(1-i)(2+3i)$
k. $(2-i)(3+2i)$
l. $(1-4i)^2$
m. $(2+i)^3$
n. $\frac{1}{2-3i}$
o. $\frac{2+i}{1-2i}$
p. $\frac{3+2i}{2-3i}$
q. $\frac{2i}{2+i}$
r. $\frac{3-2i}{i}$
s. $\frac{1}{i}$
t. $1 + i - 3i^2 + i^7$
u. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$
v. $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
w. $(-1+i)^4$
x. $\left(\frac{2+3i}{5+i}\right)^4$
y. $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^8$
z. $\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\right)^{12}$

Recherche 2 - 5 Formes algébriques

On pose $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = -2i$. Écrivez sous forme algébrique :

a. $3z_1$
b. $z_1 - z_3$
c. $2z_1 + z_2$
d. $2z_2 + iz_3$
e. $i(z_2z_3)$
f. $iz_1 + iz_2$
g. $z_1 + \overline{z_2}$
h. $iz_1 + \overline{z_3}$
i. $z_1\overline{z_2}$
j. $iz_1^2 + \frac{z_2}{z_3}$
k. $(z_1 + \overline{z_2}^2)^2$
l. $z_3\left(z_1 + \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}\right)^2$
m. $(z_1 + \overline{z_2}^2 + \frac{i}{z_1+z_3})^2$
n. $z_1 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{iz_1}$

Recherche 2 - 6 Équations

Déterminez les valeurs des réels x et y ou la forme algébrique du complexe z satisfaisant les équations suivantes :

a. $x+iy=(2-3i)(3+i)$

b. $(x+iy)+3(2-3i)=6-10i$

c. $2x+iy=6$

d. $(x+iy)(5+i)=3-2i$

e. $(x+iy)(2+i)=(1-i)^2$

f. $(2-i)x-(1+3i)y-7=0$

g. $x^2+2xyi+y^2=10+6i$

h. $(x+iy)^2=8-6i$

i. $(x+iy)^2=5+12i$

j. $(x+iy)^2=-3+4i$

k. $\frac{2}{z}=\frac{1}{2-i}+\frac{1}{1+2i}$

l. $\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1+2i}=1$

m. $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+x\left(-1+i\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}$

Recherche 2 - 7 Modules

Calculez les modules suivants :

a. $|-3+4i|$

b. $|6-8i|$

c. $|5+i|$

d. $|-3i|$

e. $\left|\sqrt{2}+i\right|$

f. $\left|\sqrt{2}+1\right|$

g. $\left|\frac{1}{4+3i}\right|$

h. $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right|$

i. $\left|-2+2\sqrt{3}i\right|$

j. $\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$

k. $\left|\frac{1+i}{1-2i}\right|$

Recherche 2 - 8 Modules

a. Sachant que $z_1=-3-2i$ et $z_2=1-3i$ calculez :
$|z_1|$; $|z_1-z_2|$; $|z_1+2z_2|$; $|z_1z_2|$

b. Sachant que $z_1=5+i$ et $z_2=-2+3i$, vérifiez que

$$|z_1|^2=2|z_2|^2$$

c. Soit $k\in\mathbb{R}$, $z_1=-1+8i$, $z_2=(1-k)+7i$. Déterminez les valeurs de k telles que $|z_1|=|z_2|$.

d. Soit $z=x+iy$ avec x et y des réels. Montrez que :

$$|z-2i|-|z-1|\Leftrightarrow 2x-4y+3=0$$

e. Résolvez dans $\mathbb{R}$ $|11+2i|=|x+1+5i|$.

f. Résolvez dans $\mathbb{C}$ $\sqrt{5}|z|+iz=3+i$.

Recherche 2 - 9 Équations de degré 2 ou 3

a. Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- **i.** $z^2+6z+10=0$
- **ii.** $z^2-2z+2=0$
- **iii.** $2z^2-2z+5=0$
- **iv.** $z^2-6z+10=0$
- **v.** $z^2+1=0$
- **vi.** $z^2+z+1=0$
- **vii.** $z^2-i\sqrt{2}z-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$

b. Vérifiez que $5+i$ est solution de $z^2-10z+26=0$ puis déterminez la deuxième solution.

c. Déterminez des équations du second degré telles que les nombres suivants en soient les solutions :
$\pm 2i$; $1\pm 2i$; $3\pm 2i$; $-2\pm i\sqrt{5}$

d. Si $3-2i$ est une solution de $z^2+kz+13=0$ où k est un réel, déterminez k et trouvez l'autre solution de l'équation.

e. L'équation $2z^2-(7-2i)z+k=0$ admet $1+i$ comme solution. Déterminez k puis la deuxième solution de l'équation.

f. Si $-1-2i$ est une solution de $z^2+az+b=0$, déterminez les réels a et b.

g. L'équation $z^2+(-3+2i)z+k-i=0$ où $k\in\mathbb{R}$ admet $1+i$ comme solution. Déterminez k et la deuxième solution de l'équation.

h. L'équation $z^2+(p+5i)z+q(2-i)=0$ admet $1+2i$ comme solution. Déterminez p et q ainsi que l'autre solution de l'équation.

i. L'équation $z^3-4z^2+6z-4=0$ admet $1+i$ comme solution. Trouvez les deux autres solutions.

j. Idem avec $2z^3-9z^2+30z-13=0$ et $2+3i$.

k. Idem avec $z^3-8z^2+22z-20=0$ et 2.

l. Idem avec $z^3-4z^2+6z-4=0$ et $1-i$.

m. Idem avec $z^3-iz^2-z+i=0$ et i

n. Idem avec $z^3-4z^2+4z+k=0$ et $1-3i$ en commençant par déterminer le réel k.

o. Idem avec $z^3+kz^2+z+34=0$ et $4-i$.

p. Factorisez $z^3 - 1$ par $z - 1$ puis résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 1 = 0$.

q. Factorisez $z^3 + (3+i)z^2 - 4z - 12 - 4i$ par $z^2 - 4$ puis résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (3+i)z^2 - 4z - 12 - 4i = 0$.

Recherche 2 - 10 Équation dans C

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation $\frac{z+1}{z-1} = 1 + i$.

Recherche 2 - 11 Système d'équations dans C

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ -2iz_1 + z_2 = 0 \end{cases}$

Recherche 2 - 12 Équation à coefficients dans R

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

Recherche 2 - 13 Équation à coefficients dans C

a. Calculer $(3-2i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z - 1 + 3i = 0$.

b. Calculer $(5-3i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (5-i)z + 2 + 5i = 0$.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5+3i)z + 10 + 5i = 0$.

Recherche 2 - 14 Centres étrangers, juin 2007

a. Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

b. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.

c. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Recherche 2 - 15 Amérique du Nord, juin 2006

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.
Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- pour tout nombre complexe z non nul $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Recherche 2 - 16 Inversion complexe

On considère l'application f du plan complexe dans $\mathbb{C}$ qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe $1/z$. On pose $z = x + iy$ la forme algébrique de z et $x' + iy'$ celle de l'affixe z' de M'.

a. Exprimez x' et y' en fonction de x et y.

b. Quelle est l'image de M' par f ? Déduisez-en l'expression de x et y en fonction de x' et y'.

c. Soit D une droite d'équation $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminez une équation de l'image de D par f. Déduisez-en la nature de cette image.

d. Cas particulier : déterminez l'image de la droite Δ d'équation $x = 32$.

Recherche 2 - 17 Équations - systèmes

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

i. $\frac{z+2}{z+2i} = i$

ii. $2z + i\overline{z} = 5 - i$

b. Résoudre dans $\mathbb{C} \cdot \mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} 2iz + z' &= 2i \\ 3z - iz' &= 1 \end{cases}$

Recherche 2 - 18 Équations coeff complexes

a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$

b. Soit l'équation (F) d'inconnue complexe z :

$$(\text{F}) : z^2 - 2z + 4 + 4i = 0$$

c. Montrer que (F) admet pour solution un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.

d. Résoudre l'équation (F).

Recherche 2 - 19 Équation de degré 4

On considère le polynôme $\text{P}(z) = z^4 + 17\,z^2 - 28\,z + 260$, où z est un nombre complexe.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4\,z + 20).$$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{P}(z) = 0$.

c. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4i$, $n = -2 - 4i$, $p = 2 + 3i$ et $q = 2 - 3i$.

d. **i.** Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z - p}{z - m} = i$. Placer son image K.

ii. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.

e. **i.** Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.

ii. Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.

iii. Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Recherche 2 - 20 VRAI ou FAUX

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.
On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

a. Si $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$, alors z^4 est un nombre réel.

b. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.

c. Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = \text{i}$ ou $z = -\text{i}$.

d. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Recherche 2 - 21 Bac 2017

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère l'équation

$$(E) : \qquad z^2 - 6z + c = 0$$

où c est un réel strictement supérieur à 9.

i. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

ii. Justifier que les solutions de (E) sont $z_\text{A} = 3 + \text{i}\sqrt{c - 9}$ et $z_\text{B} = 3 - \text{i}\sqrt{c - 9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Recherche 2 - 22 Bac 2017

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E) : \qquad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).

2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

Recherche 2 - 23 Bac 2017

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

Recherche 2 - 24 Bac 2012

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation
$P(z) = 0$.

2. **i.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.
ii. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Recherche 2 - 25 Bac 2011

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{B}}, z_{\mathrm{C}}$ et z_{D} où :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}, \quad z_{\mathrm{C}} = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{D}} = \overline{z_{\mathrm{C}}}.$$

i. Placer les points A et B dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
ii. Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}$ et donner le résultat sous forme algébrique.
iii. En déduire la nature du triangle ABC.

3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

4. Construire les points C et D dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. Expliquer la construction proposée.

Recherche 2 - 26

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \quad ; \quad z_B = \overline{z_A} \quad ; \quad z_C = 2z_B \quad ; \quad z_D = 3.$$

Construire une figure et la compléter tout au long de l'exercice.

3. Montrer que les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.

4. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$.

Recherche 2 - 27 Bac 2011

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

1. i. Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.
   ii. Faire une figure et construire les points P et Q.
2. i. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.
   ii. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. On suppose que l'origine O du repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. Montrer que $|a| = |b| = |c|$ puis que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{c}{a}\right| = 1$.
2. Montrer que $a + b + c = 0$.
3. Montrer que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{b}{a} + 1\right| = 1$.
4. En utilisant A, montrer que $\dfrac{b}{a} = p$ ou $\dfrac{b}{a} = q$.

Recherche 2 - 28 Bac2015

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$.
   Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble E.

THÈME No

3

EXPONENTIELLE

1 Le programme

- ROC : savoir démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. *La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable dur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise.*
- ROC : savoir démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0>$ *On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(ux)$*
- Savoir utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.
- Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. *On fait le lien etre le nombre dérivé en 0 et la limite en 0 de* $\frac{\exp(x)-1}{x}$
- Connaître et exploiter $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$.

2 Souvenirs de 1ère

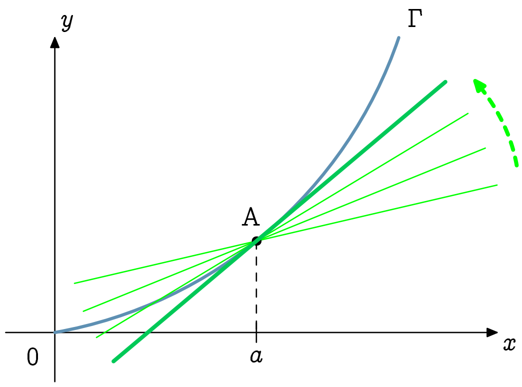
2 1 La touchante

Mathémator : Le problème de la tangente intriguait les mathématiciens du XVIIe . Fermat avait résolu le problème de la « touchante » sur un cas particulier, de manière algébrique et au prix de pas mal de ce qui nous apparaît comme des tours de passe passe (je divise par h et ensuite je suppose que $h = 0$ mais ce genre de magouilles hante les traités actuels de mathématiques financières...). Leibniz a eu le mérite d'introduire des notations et des formulations claires.

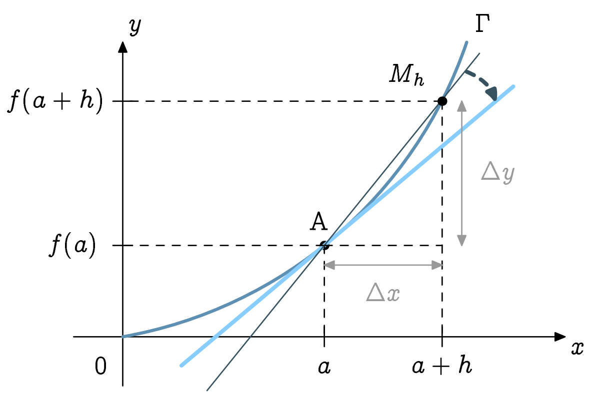
Téhessix : Mais qu'est-ce qu'une tangente ? On l'avait définie l'année dernière à l'aide des dérivées.

Mathémator : Une tangente, ou une « touchante » comme disait Fermat, était définie au XVIIe comme une « droite limite » qui ne « toucherait » la courbe localement qu'en un seul point [a].

Téhessix : Je me souviens : on fait tourner des droites autour d'un point



Mathémator : Voilà, mais il faut être un peu plus précis pour comprendre l'intuition de Leibniz (et d'autres)



a. Aujourd'hui, la notion de tangente n'est plus uniquement liée à une droite, mais se définit à partir d'une limite

La pente de la droite (AM_h) vaut

$$p_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{M_h} - y_A}{x_{M_h} - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

L'idée est alors que plus h sera petit, plus la droite (AM_h) se rapprochera de la tangente, et plus p_h se rapprochera de la pente de la tangente.
Pour nous, grands mathématiciens du XXI^e siècle, il suffit donc de faire tendre h vers 0 et de prendre la limite de p_h, si elle existe.

$$p = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2 2 Qu'est-ce que la dérivée d'une fonction en un point ?

Mathémator : Les deux problèmes que nous venons de voir, ceux de la vitesse instantanée et de la tangente, vous ont convaincu, j'espère, de l'importance fondamentale en mathématiques et en physique de la limite du taux d'accroissement d'une fonction. Il fallait absolument lui donner un nom et rendre la notion rigoureuse car nous avions été bloqués au moment d'étudier les dérivées intuitivement dans le chapitre 2.

Définition 3 - 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit a un élément I.
On dit que f **est dérivable en** a lorsque le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée **dérivée de** f **en** a, et est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

ou encore

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ainsi, la vitesse instantanée $V(t)$ n'est autre que $x'(t)$, la dérivée en t de la fonction position x. Et la pente de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse a est égale à $f'(a)$, la dérivée de f en a.

Aparté

D'où vient la notation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$?
En physique, vous employez plus volontiers la notation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ alors qu'en mathématiques, nous privilégions la notation $y'(x)$.
D'une part, l'une est due à Leibniz, l'autre à Lagrange. D'autre part, la première est liée à la figure précédente : la pente de la tangente ressemble à $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand ces grandeurs deviennent infiniment petites. Devenu infiniment petit, le Δ devient d et la pente devient donc $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.
C'est une vision intuitive, qui « marche » pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais trop restrictive pour le mathématicien qui est amené à travailler avec des fonctions vectorielles dans des espaces de dimension quelconque (!). Pour le mathématicien, $\mathrm{d}y$ est alors une fonction de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des fonctions linéaires de l'ensemble de départ dans l'ensemble d'arrivée, et le $\mathrm{d}y$ du physicien sera plutôt $\mathrm{d}y_x(h)$, if you see what I mean...

2 3 Comment calculer la dérivée d'une fonction en a ?

Téhessix : Ben vous venez de le dire, avec un calcul de limite.

Mathémator : Ah bé dame, c'est sûr. Y a plus qu'à s'y mettre. Considérez la fonction f: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

Calculez $f'(a)$ pour tout réel a.

Téhessix : Et bien

$$p_h = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

En développant $(a+h)^2$, on a

$$p_h = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

et on en déduit que la dérivée de f existe pour tout réel a et vaut

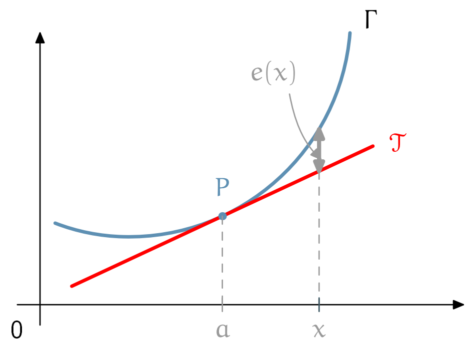
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} p_h = 2a$$

Incroyable ! On retrouve la formule.

Mathémator : On peut même s'occuper de la fonction inverse, de la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une composée : je vous laisse vous en occuper à titre d'exercice...

2 4 L'idée fondamentale du calcul différentiel : l'approximation locale des fonctions par des fonctions affines

Mathémator : À l'aide du dessin ci-dessous, essayons d'estimer l'erreur faite en remplaçant Γ par $\mathscr{T}$ localement au voisinage de a



Pour un x donné, l'erreur vaut

$$e(x) = f(x) - \big(f(a) + (x-a)f'(a)\big)$$

puisque vous connaissez une équation de la tangente $\mathscr{T}$.
Maintenant, abordons une notion que Leibniz n'avait pas su rigoureusement traiter. On « sent » que plus x va se rapprocher de a, plus $e(x)$ sera « petit », mais comment définir ce terme ? Vous vous doutez qu'une fourmi est « petite » par rapport au système solaire mais « grande » par rapport à un quark, donc la notion de $e(x)$ devient petit ne peut nous satisfaire. Alors observons. En ré-écrivant la relation, on obtient

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{\text{constante}} + \underbrace{(x-a)\times f'(a)}_{\text{de l'ordre de } x-a} + e(x)$$

Il faudrait donc connaître l'ordre de $e(x)$ par rapport à $(x-a)$. Pour cela on étudie leur rapport

$$\lim_{x\to a} \frac{e(x)}{(x-a)} = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

d'après la définition de $f'(a)$ puisqu'on suppose que f est dérivable en a. Donc l'erreur $e(x)$ est « petite » ou « négligeable » devant $x-a$. On peut alors écrire

Propriété 3 - 1

Approximation locale d'une courbe par sa tangente
Au voisinage de d'un nombre a où f est dérivable,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)e(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to a} e(x) = 0$$

On pourra retenir une formulation mnémotechnique mais peu rigoureuse

$$f(x) \underset{a}{\approx} f(a) + (x-a)f'(a)$$

On peut donc localement approcher une fonction dérivable par une fonction affine, ce qui peut pas mal nous simplifier la vie pour étudier son comportement ou la modéliser.

Considérons par exemple la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$ et étudions la au voisinage de 0. On obtient facilement $f(0)=1$ et $f'(0)=1/2$, donc

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + x e(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} e(x) = 0$$

Vérifions par le calcul

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+1/1000} & \approx & 1,000499875 \\ 1+1/2000 & = & 1,0005 \end{array}$$

Donc l'erreur commise est de l'ordre de $1,2510\times 10^{-7}$, c'est à dire vraiment négligeable devant x qui vaut 10^{-3}.

Cette propriété inspira Euler qui s'en servi pour obtenir un tracé approximatif de solutions d'équations différentielles comme nous allons le voir tout de suite.

3 À la recherche d'une fonction proportionnelle à sa dérivée

3 1 Enquête

On a retrouvé le corps de la pauvre Laura PALMER à 6 heures du matin. Le médecin a relevé une température du corps de 30 °C. Quinze minutes plus tard, la température était tombée à 29.5 °C. La température extérieure est restée stable toute la nuit et égale à 0 °C.
À quelle heure a eu lieu le crime ?

Une loi physique a été établie par NEWTON, encore lui, au sujet du refroidissement des corps inertes, qu'il s'agisse d'un morceau de fromage ou d'une jeune américaine assassinée :

> *La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant*

Si on appelle $\theta(t)$ la température du corps à l'instant t, la vitesse de refroidissement s'exprime donc comme la limite du taux d'accroissement entre deux instants « très proches » :

$$v_f(t) = \lim_{dt\to 0} \frac{\theta(t+dt)-\theta(t)}{dt} = \theta'(t)$$

Or cette vitesse est proportionnelle à l'écart avec la température ambiante, ici 0. Il existe donc une constante de proportionnalité k telle que :

$$\theta'(t) = k\cdot\theta(t)$$

On dit que θ est une solution de *l'équation différentielle* $f' = k\cdot f$, une équation dont l'inconnue est une fonction et qui relie cette fonction à sa dérivée.
L'équation différentielle $f' = k\,f$ se retrouve dans de nombreux problèmes : désintégration des noyaux des atomes d'un corps radioactif, datation au carbone 14, évolution d'une population où la croissance est proportionnelle au nombre d'habitants, etc. Le problème est de trouver une fonction la satisfaisant.
Par exemple, certains phénomènes en mécanique conduisent à étudier l'équation différentielle $f'' = -f$. Nous connaissons au moins deux fonctions la satisfaisant : cosinus et sinus.
Le problème avec $f' = kf$, c'est que nous ne connaissons aucune fonction solution.

3 2 Construction approchée du graphe d'une solution par la méthode d'Euler

Nous allons simplifier le problème : soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = f(x)$.

1. Soit h un réel voisin de zéro. Montrez que, pour tout réel a, l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit

$$f(a+h) \approx (1+h) \times f(a)$$

2. On prend $h = 0,001$. On note (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + h$. Donnez une approximation de $f(a_{n+1})$ en fonction de $f(a_n)$.
   Déduisez-en que la suite des approximations de $f(a_n)$ est une suite géométrique que vous caractériserez.
3. Faîtes de même avec $h = -0,001$.
4. Montrez que $f(1) \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et calculez la valeur approchée correspondante de $f(1)$ pour $n = 10\,000$.
5. On en déduit que l'algorithme suivant devrait nous permettre de tracer une représentation graphique de notre fonction mystérieuse :

```
Algorithme d'Euler pour tracer la solution de f'=f avec f(0)=1
Variable
    x, y, h : réels
Début
    x ← 0
    y ← 1
    h ← 0,000001
    TantQue x < 2 Faire
        x ← x + h
        y ← .....
        Placer le point (x,y)
    FinTantQue
Fin
```

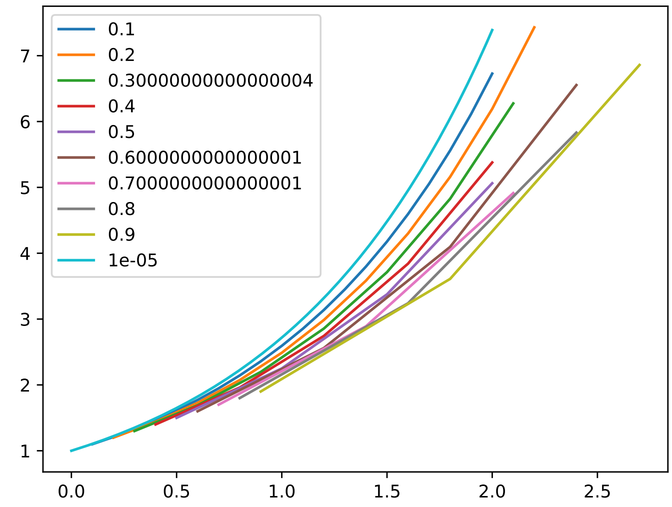
   Complétez la ligne incomplète.
6. Que se passe-t-il sii $h = 0$? $h = 2$?
7. Expliquez pourquoi, avec $h \in]0, 2]$ il est certain que l'algorithme terminera.
8. Quelle partie de la courbe obtient-on ? Comment faire pour avoir la partie de la courbe correspondant aux abscisses entre -2 et 0 ?

Avec Python, on peut tracer une courbe avec la fonction **plot** en donnat comme argument la liste des abscisses et la liste des ordonnées des points. Cela donne ici :

```python
def euler(h, x0, y0, xmax):
    x, y = x0, y0
    X, Y = [], []
    while x < xmax:
        x += h
        y *= (1 + h)
        X.append(x)
        Y.append(y)
    plt.plot(X,Y, label=str(h))
```

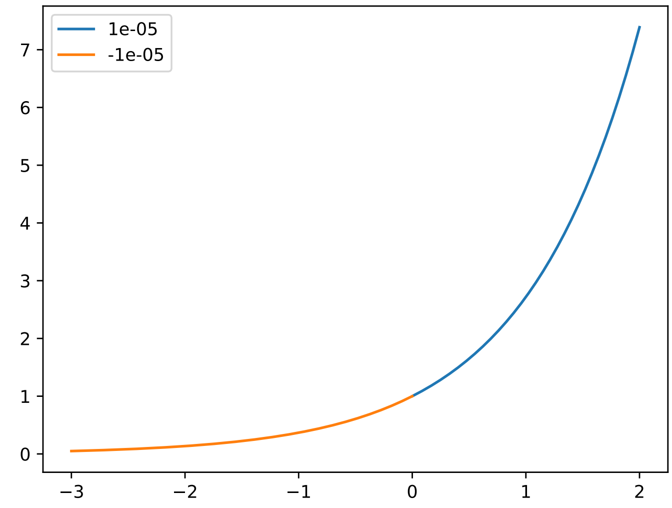
On peut observer d'abord l'influence de h :

```
for p in range(1,20):
    euler(0.1*p,0,1,2)

euler(1e-5,0,1,2)
plt.legend()
plt.show()
```



En modifiant un peu les conditions on peut avoir un tracé sur $[-3, 2]$ par exemple :

```
def euler(h, x0, y0, xmax):
    x, y = x0, y0
    X, Y = [], []
    while x < xmax if h > 0 else x > xmax :
        x += h
        y *= (1 + h)
        X.append(x)
        Y.append(y)
    plt.plot(X,Y, label=str(h))

euler(1e-5,0,1,2)
euler(-1e-5,0,1,-3)
```



Avec la Casio...

Il y a au moins deux possibilités pour illustrer notre construction sur l'écran d'une Casio :

En traitant une suite comme une fonction habituelle On veut par exemple tracer les 201 premiers termes de la suite des $f(a_n) = (1+h)^n$ pour $h = 0.01$. Le maximum en ordonnée sera $f(a_{200}) = 1,01^{200} \approx 7,3$.

On va sur le menu GRAPH. On rentre Y= 1 . 0 1 ^ X,θ,T EXE

On tape ensuite sur DRAW.

On peut régler la fenêtre avec SHIFT V-WIN puis

- Xmin : 0
- Xmax : 200
- Ymin : 0
- Ymax : 8

En utilisant le mode Récursion On va sur RECUR

On tape a_{n+1}= 1 . 0 1 × a_n

On va ensuite sur SET et on règle :

- Start : 0
- End : 200
- ao : 1

Enfin on sélectionne TABL puis G·PLT.

Attention ! Le niveau de récursion est limité sur les Casio. Si vous prenez $h = 1/1000$ par exemple, vous obtiendrez une erreur.

3 3 Analyse : étude des propriétés mathématiques d'une solution

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = k\,f(x)$, avec $k \neq 0$.

1. Montrez que $f'(0) = k$.

2. Soit y un réel fixé et g la fonction définie par

$$g_y(x) = f(x+y)f(-x)$$

i. Montrez que g_y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez $g'_y(x)$.

ii. Calculez $g_y(0)$ et déduisez-en que pour tous x et y réels,

$$f(x+y)\,f(-x) = f(y) \qquad (1)$$

3. Montrez alors successivement que :

i. pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1$

ii. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

iii. pour tous réels x et y

$$f(x+y) = f(x)\,f(y)$$

3 4 Unicité de la fonction solution

Peut-on trouver une autre fonction, φ, distincte de f, et vérifiant les mêmes propriétés que f, à savoir : φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\varphi(0) = 1$ et, pour tout x, $\varphi'(x) = k\,\varphi(x)$, avec $k \neq 0$?

Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut définir la fonction $\psi = \varphi/f$.
Vérifiez que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculez sa dérivée. Que peut-on en déduire pour ψ ? Montrez alors que $f = \varphi$.

3 5 Synthèse

Nous avons cherché des solutions au problème

f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = k\,f(x)$, avec $k \neq 0$.

Nous avons montré que, *si une telle fonction existe*, alors elle est unique et elle vérifie nécessairement la relation

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) \qquad (2)$$

Il reste à vérifier que, réciproquement, une fonction dérivable, non nulle, vérifiant la relation (2) est nécessairement telle que $f(0) = 1$ et vérifie pour tout réel x $f'(x) = kf(x)$, avec k un réel non nul.

Cette vérification n'est pas anodine et conclut notre raisonnement d'*analyse-synthèse*.

1. Montrez que f ne s'annule pas et que f est à valeurs strictement positives.
2. Montrez que, comme f n'est pas la fonction nulle, alors $f(0) = 1$ en utilisant la relation (2).
3. Soit a un réel fixé. On définit la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto f(x+a)$ et la fonction $\psi\ :\ x \mapsto f(x)\times f(a)$. Montrez que $f'(x+a) = f(a)\times f'(x)$, puis que, pour tout réel a, $f'(a) = k\,f(a)$, où k est un réel que vous déterminerez.

4 Les résultats essentiels du cours

4 1 Théorème et définition

Grâce à nos recherches précédentes, nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 3 - 1

existence et unicité de la fonction exponentielle
Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On la nomme **fonction exponentielle** et on la note **exp**.
L'exponentielle est à valeurs strictement positives et vérifie la relation

$$\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y)$$

Démonstration ?

Pour le Bac, il faut être uniquement capable de démontrer l'unicité d'une telle fonction. Comment faire ?
On peut raisonner par l'absurde et supposer l'existence de deux fonctions f et φ vérifiant les mêmes propriétés puis introduire $\psi = \varphi/f$ mais pour cela il faudrait être sûr que f ne s'annule jamais et recommencer tout ce quenous avons fait dans la section précédente.

Résultat préliminaire

Bon, en fait, pour le Bac, nous allons utiliser un nouveau théorème que nous admettrons et qui sera utile aujourd'hui ettout au long de l'année :

Théorème 3 - 2

Dérivée d'une composée de fonctions
Si g est dérivable en x et f dérivable en $g(x$ alors la fonction composée $f\circ g$ est dérivable en x et :

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\times g'(x)$$

On dérive comme si $g(x)$ était une variable et on multiplie par la dérivée de « l'intérieur »

Par exemple, prenons la fonction $h : x \mapsto f(ax+b)$. Si on note $g : x \mapsto ax+b$ alors $h = f\circ g$.

Or $g'(x) = a$ donc $h'(x) = f'(ax+b) \times a$

Théorème 3 - 3

Dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$
Si f est dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$ alors la fonction composée $h : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h'(x) = a \times f'(ax+b)$$

Ainsi la dérivée de $f(-x)$ est $-f'(-x)$.

La démonstration pour le Bac

On raisonne par l'absurde et on suppose l'existence de deux fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f = f'$, $g = g'$, $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$.
Introduisons la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = f(x) \cdot g(-x)$.
Calculez la dérivée de ψ. Concluez.

4 2 Conséquences immédiates

Vous pouvez démontrer aisément que :

Propriétés 3 - 2

- $\exp(0) = 1$
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\exp(u) = u' \cdot \exp(u)$
- Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(ka) = [\exp(a)]^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)} = [\exp(a)]^{\frac{1}{n}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

4 3 La notation e^x

On pose $e = \exp(1)$. Nous avons obtenu grâce à la méthode d'Euler une approximation de e, car $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138 2$$

Nous avons obtenu précédemment que pour tout entier k,

$$\exp(k) = \exp(k \times 1) = (\exp(1))^k = e^k$$

Propriété 3 - 3

notation
Nous noterons alors, **par convention**, que

$$\exp(x) = e^x$$

Vous vérifierez que les propriétés vues précédemment sont conformes à l'usage de la notation puissance.

4 4 Propriétés analytiques de l'exponentielle

- Prouvez que

Propriété 3 - 4

ROC
$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

en étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto e^x - x$

- Déduisez-en que

Propriété 3 - 5

ROC

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

- Comparez $e^{x/2}$ et $x/2$. Déduisez-en que

Propriété 3 - 6

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

- Puis que

Propriété 3 - 7

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

.

EXERCICES

Recherche 3 - 1

Prérequis : la fonction exponentielle, notée exp, a les trois propriétés suivantes :

1. exp est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$;
2. sa fonction dérivée, notée $\exp'$, est telle que, pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$;
3. $\exp(0) = 1$.

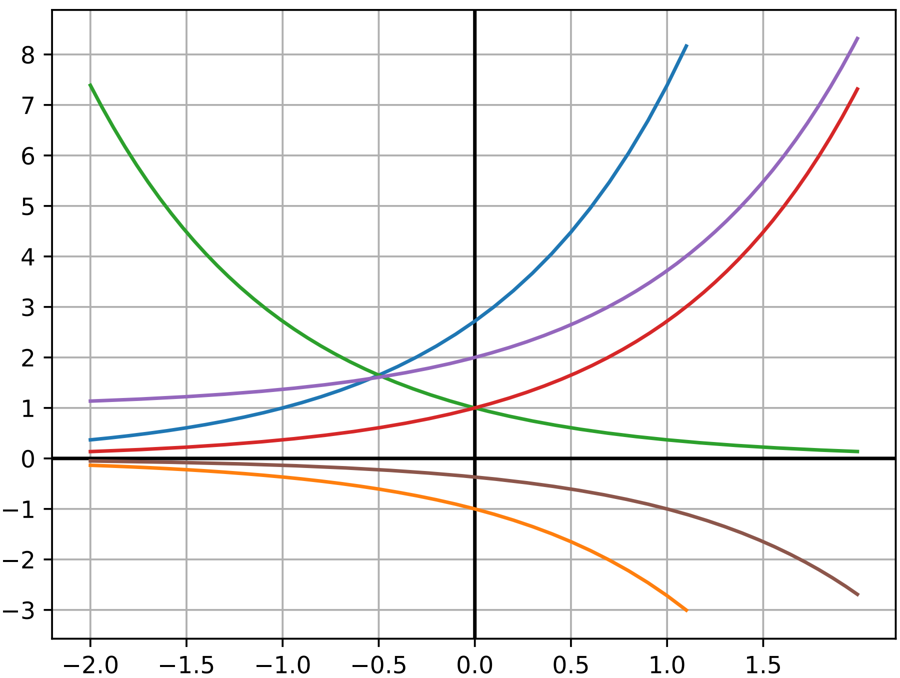
En n'utilisant que ces trois propriétés de la fonction exp, démontrer successivement que

- Pour tout nombre réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$;
- pour tout nombre réel a et tout nombre réel b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Recherche 3 - 2

Reconnaître parmi les figures ci-dessous les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{-x}$
2. $x \mapsto e^{x}$
3. $x \mapsto e^{x+1}$
4. $x \mapsto e^{x} + 1$
5. $x \mapsto -e^{x}$
6. $x \mapsto -e^{x-1}$



Recherche 3 - 3

Développez et réduisez au maximum les expressions suivantes :

1. $e^{x}e^{-x}$
2. $e^{x}e^{-x+1}$
3. ee^{-x}
4. $\left(e^{-x}\right)^2$
5. $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$
6. $\dfrac{\left(e^{x}\right)^3}{e^{2x}}$
7. $e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$
8. $\left(e^{x}\right)^5\left(e^{-2x}\right)^2$
9. $e^{-3x+1}\left(e^{x}\right)^3$
10. $\sqrt{e^{-2x}}$
11. $\dfrac{e^{-4x}e}{\left(e^{-x}\right)^2}$
12. $\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2$
13. $\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2-e^{-x}\left(e^{3x}-e^{-x}\right)$
14. $\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{2x}+e^{x}+1\right)$

Recherche 3 - 4

Calculez et factorisez les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = e^x + x^2 + 1$
2. $f_2(x) = 5e^x + 5xe^x$
3. $f_3(x) = e^x \sin(x)$
4. $f_4(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$
5. $f_5(x) = \dfrac{3x + 1 - e^x}{e^x}$
6. $f_6(x) = x^3 e^{-x}$
7. $f_7(x) = \dfrac{x^2 e^x}{x + 1}$
8. $f_8(x) = \dfrac{e^x}{x}$
9. $f_9(x) = \dfrac{1}{e^x}$
10. $f_{10}(x) = (e^x)^2 + \dfrac{1}{e^x}$
11. $f_{11}(x) = e^{-x}$
12. $f_{12}(x) = e^{4x+1}$
13. $f_{13}(x) = e^{\cos(x)}$
14. $f_{14}(x) = e^{5x^3+7x+4}$
15. $f_{15}(x) = (x + 1)e^{-x+1}$
16. $f_{16}(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

Recherche 3 - 5

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\exp(x)$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminez les variations de la fonction g.
3. Déterminez une équationde la tangente à Γ au point d'abscisse 0.

Recherche 3 - 6

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)e^x$ et $g(x) = \frac{e}{2}(x^2 - 1)$.

1. Déterminez les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives de f et g avec les axes de coordonnées.
2. Montrez que les deux courbesont un point commun d'abscisse 1.
3. Démontrez que les courbes admettent une tangente commune au point d'abscisse 1 et donnez une équation de cette tangente.

Recherche 3 - 7

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{2x}$. On note Γ_f et Γ_g leurs courbes représentatives dans un RON.
Démontrez que les deux courbes ont un unique point commun que l'on déterminera.
Les tangentes auxdeux courbes en ce point sont-elles confondues ?
Étudiez les positions relatives des deux courbes.

Recherche 3 - 8

Démontrez que pour tout réel x on a $e^x \geqslant e \times x + 1$

Recherche 3 - 9

On souhaite étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. On notera Γ sa courbe représentative.

1. En étudiant la signe du dénominateur, déterminez l'ensemble de définition de f.
2. Démontrez que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.
3. Étudiez les variations de f sur son ensemble de définition.
4. Déterminez une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 0.

5. On souhaite dans cette question encadrer la solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ à l'aide d'un algorithme.

i. Démontrez que résoudre $f(x) = \frac{1}{2}$ revient à résoudre $e^{2x} = 3$.

ii. Vérifiez à l'aide de la calculatrice que la solution est comprise entre 0 et 1.

iii. Faites fonctionner l'algorithme ci-dessous pour $k = 2$:

Algorithme de résolution de $f(x) = \frac{1}{2}$

Variable

  k : *entier naturel*
  a,b,m : *réels*
  Saisir k

Début

  a ← 0
  b ← 1
  TantQue $b - a \geqslant 10^{-k}$ **Faire**
    m ← $\frac{a+b}{2}$
    Si $c^{2m} < 3$ **Alors**
      a ← m
    Sinon
      b ← m
    FinSi
  FinTantQue
  Afficher a et b

Fin

iv. Déduisez-en unencadrement de la solution d'amplitude strictement inférieureà 10^{-2}.

Recherche 3 - 10

À quelle heure a été assassinée Laura Palmer ?

L'exponentielle à travers les sciences

Recherche 3 - 11

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T sont animées d'une vitesse de v cm.s^{-1}. Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de MAXWELL-BOLTZMANN

$$F(v) = cv^2\, e^{-mv^2/(2kT)}$$

où T est la température (en K), m la masse d'une molécule et c et k des constantes positives.
Montrez que la valeur maximale de F a lieu en $v = \sqrt{2kT/m}$.

Recherche 3 - 12

La fonction de croissance de VON BERTANLANFFY donne approximativement la masse $W(t)$ (en kg) à l'âge t (en années) des éléphantes africaines. Son expression est

$$W(t) = 2600\left(1 - 0,51e^{-0,075\,t}\right)^3$$

1. Évaluez la masse et le taux de croissance d'un nouveau-né (le taux de croissance à l'instant t est évidemment $W'(t)$).
2. Calculez et interprétez $\lim\limits_{t\to+\infty} W(t)$.

Recherche 3 - 13

Un *modèle de densité urbaine* est une formule qui lie la densité de la population (en nombre de personnes par unité de surface) à la distance r (en unité de longueur) du centre ville. La formule

$$D = a\,e^{-br+cr^2}$$

où a, b et c sont des constantes positives (a est la densité au centre, b le coefficient de décroissance), convient pour certaines villes des États-Unis
Déterminez l'allure de la courbe représentative de ce modèle.

Recherche 3 - 14

En statistiques, la *distribution normale* est définie par la fonction de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \quad \text{où} \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

μ est la moyenne de cette distribution et σ^2 la variance. L'étude de cette fonction est utilisée dans des domaines qui vont de la mécanique quantique à la répartition des notes du baccalauréat. Étudiez cette fonction (sens de variation, limites) et tracez la courbe représentative de f.

Recherche 3 - 15

On considère un circuit électrique composé d'une force électromotrice U, d'une résistance R et d'une inductance L. L'intensité du courant I varie en fonction du temps t selon la formule

$$I = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

On considère que R est la seule variable indépendante, *i.e.* U, L et t sont considérés comme des constantes et R comme une variable. Calculez $\lim\limits_{\substack{R\to 0\\ R>0}} I$.

Recherche 3 - 16

Dans la forêt syldave, des détritus naturels (feuilles, branches, animaux morts, cadavres d'espions, etc.) tombent sur le sol et s'y décomposent. La quantité $Q(t)$ exprimée en $g\cdot m^{-2}$ de détritus jonchant le sol varie avec le temps t. On suppose que de nouveaux détritus tombent au sol à un taux constant de $200\,g\cdot m^{-2}$ par année et que les détritus accumulés au sol se décomposent au taux de 50% de la quantité de détritus jonchant le sol.

1. On note $f(t) = Q(t) - 200$. Déterminez une équation différentielle vérifiée par f.
2. En déduire l'expression générale de $Q(t)$.
3. Exprimer $Q(t)$ sachant qu'au temps $t = 0$, on comptait $50\,g\cdot\ m^{-2}$

Recherche 3 - 17

Si vous allez vous promener dans la ville de Saint-Louis dans le Missouri aux États-Unis, vous pourrez y admirer la célèbre *Gateway Arch to the West* conçue en 1947 par l'architecte finlandais Ero Saarinen et l'ingénieur Hannskarl Bandel et dont la construction s'acheva en 1965. Cette arche a la forme d'une *chaînette* pondérée d'équation

$$y = 212 - 21(0,033x)$$

où x et y sont mesurés en mètres et rend hommage aux pionniers partis à la conquête de l'Ouest.
Pouvez-vous déterminer la hauteur de l'arche et la distance entre les deux pieds ?

Recherche 3 - 18

L'équation de la hauteur h par rapport au sol d'un fil électrique suspendu entre deux poteaux s'obtient en résolvant l'*équation différentielle*

$$h''(x) = k\sqrt{1 + (h'(x))^2}$$

où k est un paramètre qui dépend de la densité et de la tension du fil et x est mesuré en mètres horizontalement à partir d'une origine située sur le sol en-dessous du point où la hauteur du fil est la plus faible.

1. Vérifiez que $h : x \mapsto \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2k}$ satisfait cette équation différentielle.
2. Quelle est la hauteur minimale du fil si le paramètre k vaut $0,05$?
3. Quelle est la hauteur des poteaux (de même hauteur) s'ils sont distants de 30 m et que le paramètre k vaut 0,05 ?

Des exercices de Bac

Recherche 3 - 19 **Bac 2017**

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \qquad \text{où } b > 0.$$

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$:
$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right).$$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

Recherche 3 - 20 **Bac 2017**

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t, $v(t) = 9,81\dfrac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
2. La goutte ralentit -elle au cours de sa chute ?
3. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 9,81\dfrac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.
À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-l}.

1. Depuis combien de temps la goutte s'est -elle détachée de son nuage ? Arrondir la réponse au dixième de seconde.
2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1}.

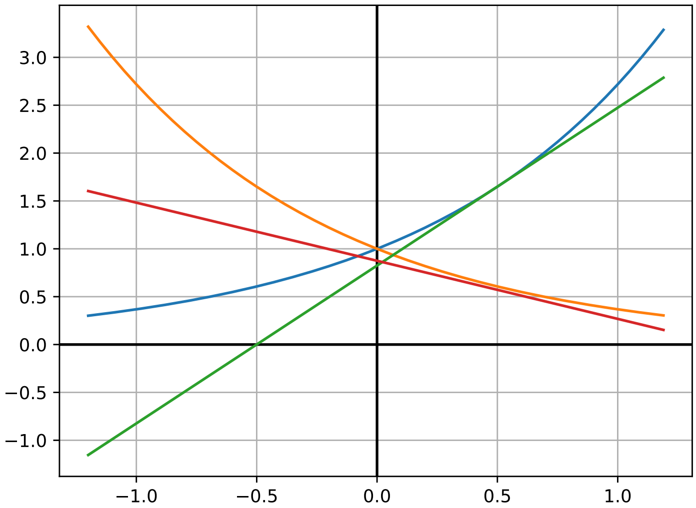
Recherche 3 - 21 **Bac 2017**

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.
Pour tout réel a, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a.
La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	$-2,5$	2
4	-2	2
5	$-1,5$	2
6	-1	2
7	$-0,5$	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathscr{C}_g$.

2. **i.** Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

ii. Démontrer cette conjecture.

Recherche 3 - 22 **Bac 2017**

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On admet que g est strictement d'ecroissante de $[0, +\infty[$ dans $[-1, 0]$
En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.
On rappelle que la fonction C est définie sur l' intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
   i. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
   ii. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
   Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.
2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Recherche 3 - 23 **Bac 2018**

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. i. Étudier les variations de la fonction g.
   ii. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1\ ;\ 0]$.
3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. **i.** Démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

ii. En déduire que, pour $x > 1$,

$$0 < f(x) < 4x^3 e^{-2x+1}.$$

iii. On admet que, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3 e^{-2x+1} = \frac{e}{2}(2x)^3 e^{-2x}$ puis montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3 e^{-2x+1} = 0.$$

iv. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right) e^{-2x+1}$.

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.