Les suites

I - Définition

Pour faire court, on pourrait se contenter de dire

Définition 1.1 (Suite numérique)
Une suite numérique réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Mais développons un peu. Considérons par exemple la suite définie par[a] $u_n = \sqrt{2n+1}$.
La suite u qu'on note encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même (u_n), est la fonction qui, à n'importe quel **entier** n associe le **réel** $\sqrt{2n+1}$
On pourra donc parler de *limite* de la suite (u_n), c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1}$
Si ce n'est qu'une fonction, pourquoi lui avoir donné un nom spécial ?

II - Inerprétation « économique »

Votre mamie vous donne 2 euros 50 tous les ans le 25 décembre. Vous décidez de garder précieusement cet argent dans votre chaussette préférée en vous interdisant d'y toucher pendant les soixante-quinze ans à venir.
Notons C_1 votre capital après un noël et plus généralement C_n votre capital après n noël.
On a $C_1 = 2,5$ puis $C_2 = 5$, $C_3 = 7,5$, etc.
Avec un bon sens de l'observation, nous remarquons que

$$C_n = 2,5 \times n$$

Nous avons ainsi tout naturellement construit une *suite* de sommes d'argent qui est en fait une suite numérique de *terme général* $C_n = 2,5n$.

III - Suites arithmétiques

Définition 1.2 (Suite arithmétique)
Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + b$$

On appelle b la raison de la suite

[a] On dit aussi de terme général $u_n = \sqrt{2n+1}$

Les propriétés suivantes seront prouvées à titre d'exercices :

Propriété 1.1
Étant donné une suite arithmétique de raison b

- ▷ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nb$
- ▷ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{1er terme+dernier terme})}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

En particulier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV - Suites géométriques

Définition 1.3 (Suite géométrique)
Une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel a tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a \cdot u_n$$

On appelle a la raison de la suite

Les propriétés seront prouvées à titre d'exercices :

Propriété 1.2
Étant donné une suite géométrique de raison a

- ▷ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \cdot a^n$
- ▷ Si $a \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} = u_0 \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

En particulier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $q \neq 1$.