Suites au Bac 2009

Exercice 1

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

2. a) Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b) Calculer S_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :

Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considére la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.

Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 2

PARTIE A :

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :

pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.

Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.

En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :

$$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).

Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

PARTIE B :

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.

a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 3

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}.$$

1. **Restitution organisée de connaissances :**
   La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant
   $$\begin{cases} g'(x) = g(x) & \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.\\ g(0) = 1 & \end{cases}$$
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B :

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n=\frac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

1. Démontrer que $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. En déduire, en utilisant aussi la partie A, que la suite (u_n) converge vers $e-1$.

Exercice 4

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :
   $$u_0=1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4.$$
   On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n=u_n-6$.
   a) Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n=-5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+6$.
   c) Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n\geqslant 1$:
   $$nw_n=(n+1)w_{n-1}+1 \text{ et } w_0=1.$$
   Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

   a) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
   b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.