Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Guillaume CONNAN

Lycée Jean PERRIN

Sommaire

Précisons d'abord un peu les choses. On considère une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, ainsi qu'un élément a de I. Et la question est de savoir s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Précisons d'abord un peu les choses. On considère une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, ainsi qu'un élément a de I. Et la question est de savoir s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Il me semble que oui ! Il suffit de définir u_1 comme égal à $f(a)$, et ainsi de suite.

C'est tout ce que cela vous inspire, Téhessin ? Vous êtes sûr de pouvoir continuer ?

C'est tout ce que cela vous inspire, Téhessin ? Vous êtes sûr de pouvoir continuer ?

Ben, oui, je pose $u_2 = f(u_1)$, puis... ! ? Ah, je vois le problème : il faudrait que f soit définie en u_1 !

Ce qui n'a en effet aucune raison de se produire. Par exemple, il n'existe pas de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{1}{u_n}.$$

Ce qui n'a en effet aucune raison de se produire. Par exemple, il n'existe pas de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{1}{u_n}.$$

Car, avec $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$, on a $g(-1) = 0$, donc g n'est pas définie en $g(-1)$. Il faut également s'assurer qu'aucun des termes suivants ne va être égal à -1.

Ce qui n'a en effet aucune raison de se produire. Par exemple, il n'existe pas de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{1}{u_n}.$$

Car, avec $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$, on a $g(-1) = 0$, donc g n'est pas définie en $g(-1)$. Il faut également s'assurer qu'aucun des termes suivants ne va être égal à -1.

D'accord, mais si on avait pris une valeur strictement positive pour u_0, alors on aurait eu $g(u_0) > 0$, donc on pourrait définir $g(g(u_0))$ qui serait lui-même strictement positif, etc. On pourrait donc définir tous les termes de la suite.

Tout à fait ! Et le point clé dans ce que vous venez de dire est que $g(]0,1[) \subset]0,1[$, ce qui, avec la définition suivante, se traduit par « $]0,1[$ est stable par g ».

Tout à fait ! Et le point clé dans ce que vous venez de dire est que $g(]0,1[) \subset]0,1[$, ce qui, avec la définition suivante, se traduit par « $]0,1[$ est stable par g ».

Cela veut donc dire que si on prend u_0 dans $]0,1[$, on est sûr que tous les termes *resteront* dans cet intervalle.

Partie stable

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On dit qu'une partie S de I est **stable par** f lorsque

$$\text{pour tout } x \in S \quad f(x) \in S.$$

Euh.....Eh bien euh...

Euh.....Eh bien euh...

Je vois. Voyons le début d'un petit exercice de Bac sur les suites.

Exercice

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

- Étudiez les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$.
- Montrez que si $x \in [1;2]$, alors $f(x) \in [1;2]$.
- Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par

Montrez que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$

Exercice

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

- Étudiez les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
- Montrez que si $x \in [1\,;2]$, alors $f(x) \in [1\,;2]$.
- Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par
  - $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

Montrez que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$

Exercice

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

- Étudiez les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
- Montrez que si $x \in [1\,;2]$, alors $f(x) \in [1\,;2]$.
- Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par
  - $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
  - $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$

  Montrez que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$

Exercice

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

- Étudiez les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
- Montrez que si $x \in [1 ; 2]$, alors $f(x) \in [1 ; 2]$.
- Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par
  - $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
  - $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$

  Montrez que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$

Exercice

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

- Étudiez les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
- Montrez que si $x \in [1\,;2]$, alors $f(x) \in [1\,;2]$.
- Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par
  - $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
  - $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$

  Montrez que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$

Exercice

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

- Étudiez les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
- Montrez que si $x \in [1\,;2]$, alors $f(x) \in [1\,;2]$.
- Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par
  - $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
  - $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$

  Montrez que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant v_n \leqslant 2$

Maintenant, si a est élément d'une partie S de I stable par f, alors on pourra définir $f(f(a))$ puisque $f(a) \in S$, puis $f(f(f(a)))$ puisque $f(f(a)) \in S$, etc. Il suffit donc de choisir u_0 dans S.

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, un intervalle I stable par f et un réel $a \in I$.
On peut alors construire une suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Une telle suite ainsi définie est appelée une suite récurrente.

Quelles sont les limites possibles d'une suite récurrente ?...

Quelles sont les limites possibles d'une suite récurrente ?...

Ben, $u_{n+1} = f(u_n)$, et donc $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n)$. Si on appelle ℓ la limite de (u_n), on a donc $\ell = f(\ell)$

Quelles sont les limites possibles d'une suite récurrente ?...

Ben, $u_{n+1} = f(u_n)$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$. Si on appelle ℓ la limite de (u_n), on a donc $\ell = f(\ell)$

Il suffit donc de résoudre l'équation $x = f(x)$.

Êtes-vous sûr que $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$? Et même en supposant que cela soit vrai, la limite ℓ n'est pas nécessairement une solution de $f(x) = x$!

Êtes-vous sûr que $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$? Et même en supposant que cela soit vrai, la limite ℓ n'est pas nécessairement une solution de $f(x) = x$!

Ah bon ! ? Alors là, je ne vois vraiment pas pourquoi.

Êtes-vous sûr que $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$? Et même en supposant que cela soit vrai, la limite ℓ n'est pas nécessairement une solution de $f(x) = x$!

Ah bon ! ? Alors là, je ne vois vraiment pas pourquoi.

La subtilité sort vraiment du cadre de la terminale. Retenez seulement que f doit être **continue** sur un intervalle I qui doit lui-même être **un intervalle fermé.**

Théorème

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, soit f une fonction continue de I vers I, et soit (u_n) une suite d'éléments de I telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Si (u_n) est convergente, alors sa limite est un point fixe de f.

Attention

Vous aurez bien noté le « ***SI*** (u_n) *est convergente, alors sa limite est...* ». Il faudra donc bien commencer par montrer que la suite est convergente.

Mettons ça en pratique dans un autre petit extrait d'un exercice de Bac.

Exercice

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

- Montrez que (u_n) est majorée par 4.
- Montrez que (u_n) est strictement croissante.
- Montrez que (u_n) converge.
- Déterminez la limte de (u_n)

Mettons ça en pratique dans un autre petit extrait d'un exercice de Bac.

Exercice

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

- Montrez que (u_n) est majorée par 4.
- Montrez que (u_n) est strictement croissante.
- Montrez que (u_n) converge.
- Déterminez la limte de (u_n)

Mettons ça en pratique dans un autre petit extrait d'un exercice de Bac.

Exercice

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

- Montrez que (u_n) est majorée par 4.
- Montrez que (u_n) est strictement croissante.
- Montrez que (u_n) converge.
- Déterminez la limte de (u_n)

Mettons ça en pratique dans un autre petit extrait d'un exercice de Bac.

Exercice

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

- Montrez que (u_n) est majorée par 4.
- Montrez que (u_n) est strictement croissante.
- Montrez que (u_n) converge.
- Déterminez la limte de (u_n)

Mettons ça en pratique dans un autre petit extrait d'un exercice de Bac.

Exercice

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

- Montrez que (u_n) est majorée par 4.
- Montrez que (u_n) est strictement croissante.
- Montrez que (u_n) converge.
- Déterminez la limte de (u_n)

Mais s'il n'y a qu'une solution à l'équation $f(x) = x$, est-ce que (u_n) ne va pas toujours converger vers cette solution ?

Mais s'il n'y a qu'une solution à l'équation $f(x) = x$, est-ce que (u_n) ne va pas toujours converger vers cette solution ?

Non ! Prenez par exemple la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 32u_n$$

Mais s'il n'y a qu'une solution à l'équation $f(x) = x$, est-ce que (u_n) ne va pas toujours converger vers cette solution ?

Non ! Prenez par exemple la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 32u_n$$

La fonction $f : x \mapsto 32x$ admet un unique point fixe qui est...

Mais s'il n'y a qu'une solution à l'équation $f(x) = x$, est-ce que (u_n) ne va pas toujours converger vers cette solution ?

Non ! Prenez par exemple la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 32u_n$$

La fonction $f : x \mapsto 32x$ admet un unique point fixe qui est...

Zéro !

... et pourtant la suite ne converge pas vers 0, n'est-ce pas ?

… et pourtant la suite ne converge pas vers 0, n'est-ce pas ?

Si vous le dites…

... et pourtant la suite ne converge pas vers 0, n'est-ce pas ?

Si vous le dites...

Observez bien le terme général $u_{n+1} = 32u_n$...

… et pourtant la suite ne converge pas vers 0, n'est-ce pas ?

Si vous le dites…

Observez bien le terme général $u_{n+1} = 32u_n$…

Bon sang ! Mais c'est bien sûr ! C'est une suite géométrique de raison 32. Elle diverge vers l'infini.

Il faudrait rajouter « en Terminale », car au Bac, dans 257 exercices sur 258, la fonction f est croissante. Voyons un exemple.

Il faudrait rajouter « en Terminale », car au Bac, dans 257 exercices sur 258, la fonction f est croissante. Voyons un exemple.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1/2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

Déterminez tout d'abord les points fixes éventueles de f.

Il faudrait rajouter « en Terminale », car au Bac, dans 257 exercices sur 258, la fonction f est croissante. Voyons un exemple.

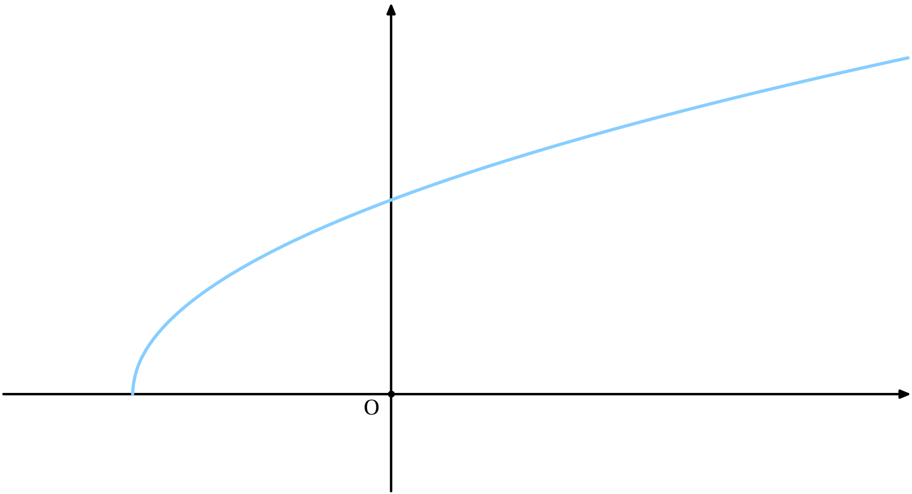
Exemple

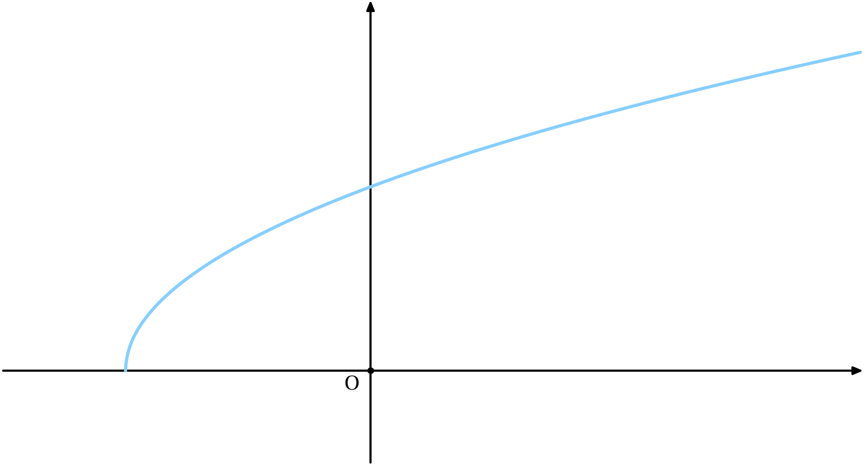
Soit (u_n) la suite définie par

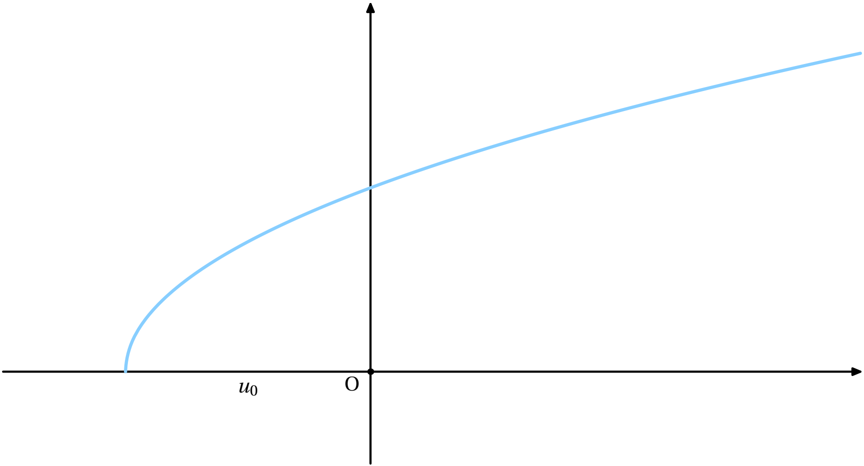
$$\begin{cases} u_0 = -1/2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

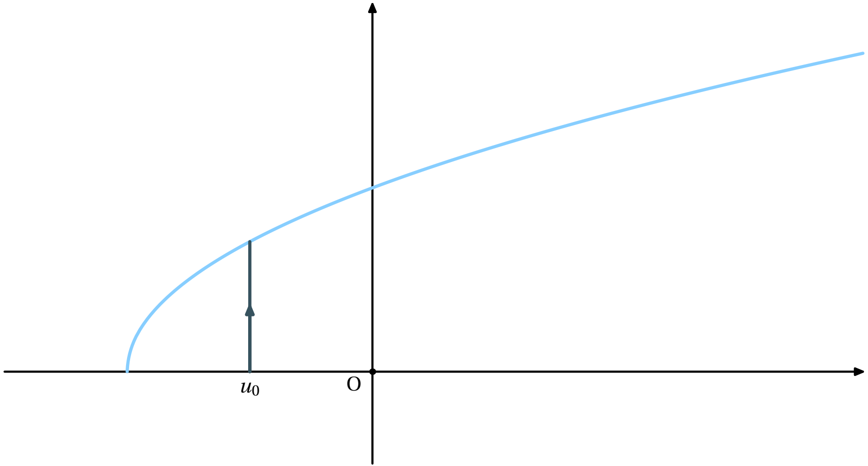
Déterminez tout d'abord les points fixes éventueles de f.

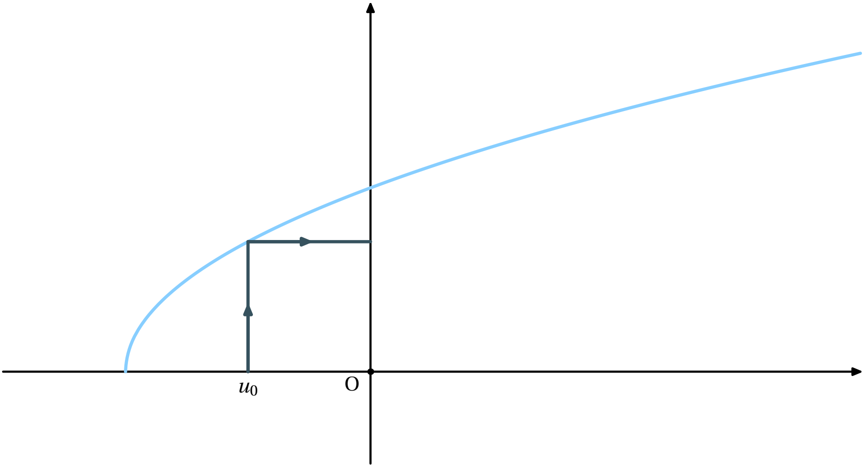
On montre que le seul point fixe est $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$

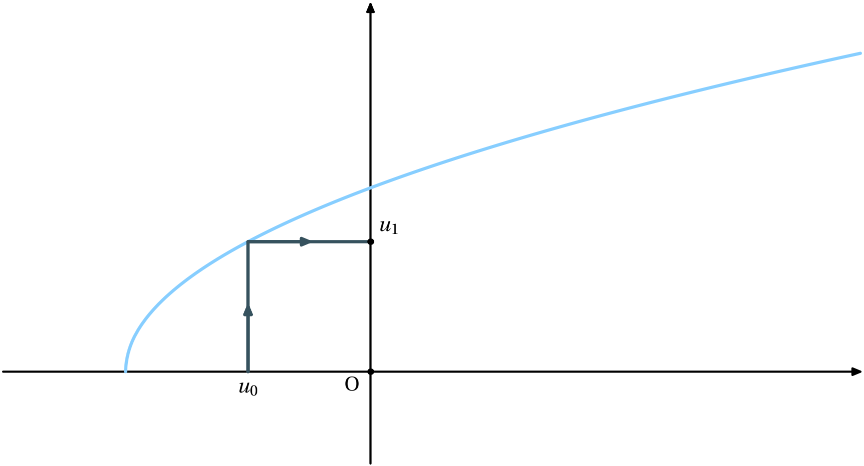

O

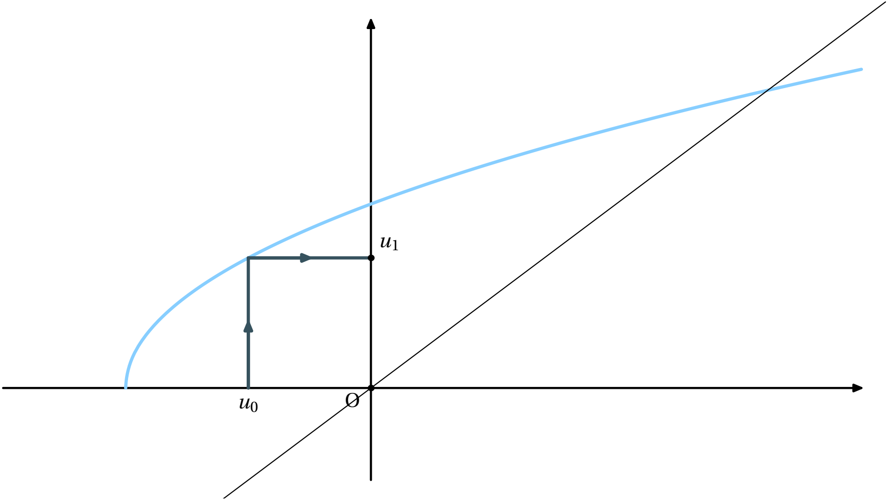

O

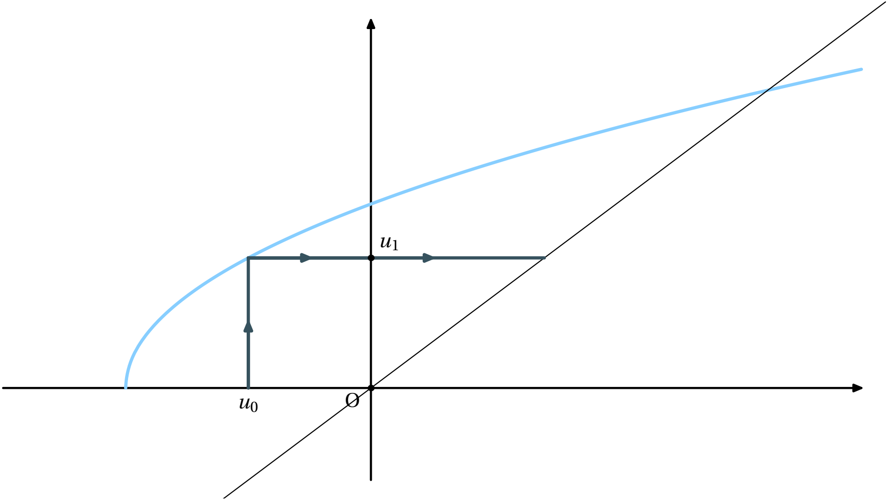

u_0
O

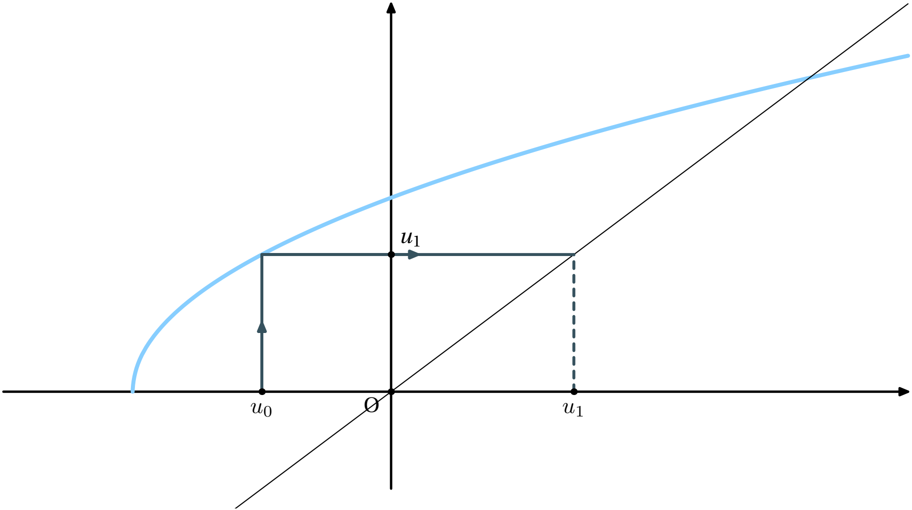

u_0
O

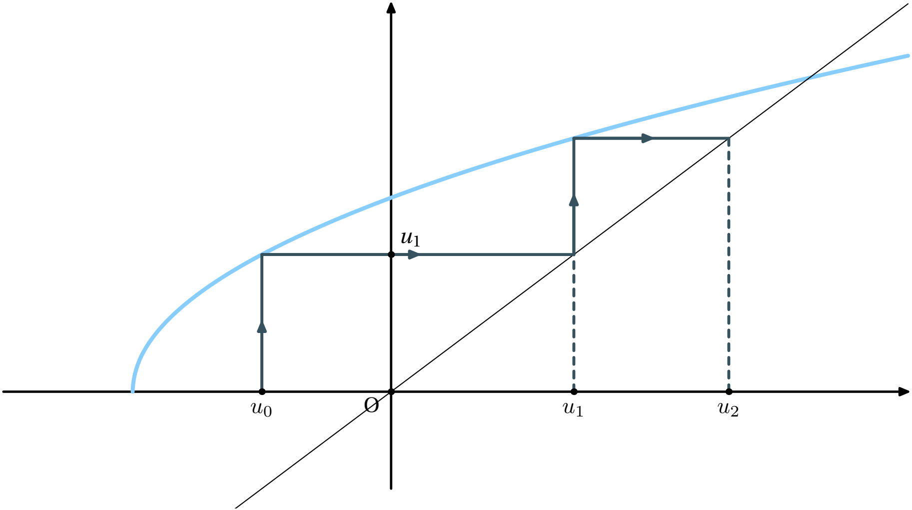

u_0
O


u_1
u_0
O

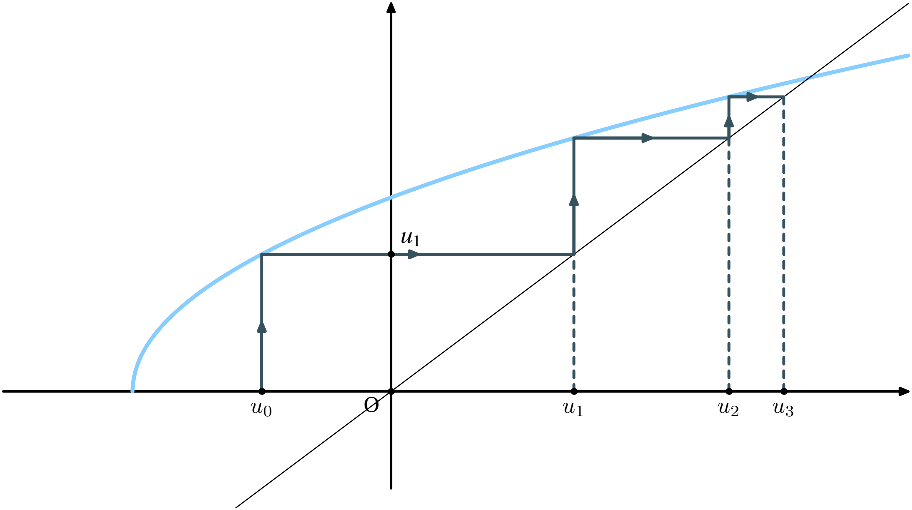

u_1
u_0
O


u_1
u_0
O

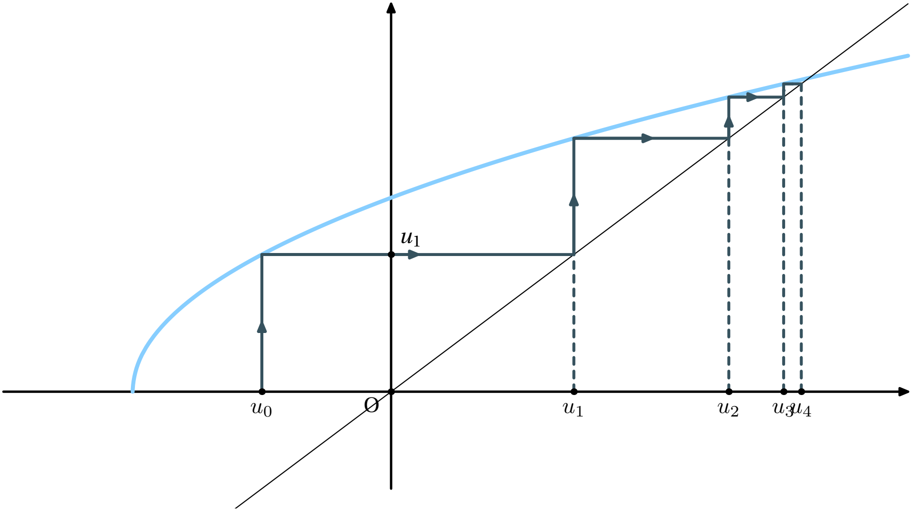

u_1
u_0
O
u_1



u_1
u_0
O
u_1
u_2



u_1
u_0
O
u_1
u_2
u_3


u_1
u_0
O
u_1
u_2
u_3
u_4

L'inégalité $a_0 < \varphi$, avec $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, se conserve.
En effet, si $a_n < \varphi$ pour un certain n,
alors $\sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\varphi}$,
c'est-à-dire $a_{n+1} < \varphi$.
On a donc montré que $a_n < \varphi$ pour tout n.

L'inégalité $a_0 < \varphi$, avec $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, se conserve.
En effet, si $a_n < \varphi$ pour un certain n,
alors $\sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\varphi}$,
c'est-à-dire $a_{n+1} < \varphi$.
On a donc montré que $a_n < \varphi$ pour tout n.

L'inégalité $a_0 < \varphi$, avec $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, se conserve.
En effet, si $a_n < \varphi$ pour un certain n,
alors $\sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\varphi}$,
c'est-à-dire $a_{n+1} < \varphi$.
On a donc montré que $a_n < \varphi$ pour tout n.

L'inégalité $a_0 < \varphi$, avec $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, se conserve.
En effet, si $a_n < \varphi$ pour un certain n,
alors $\sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\varphi}$,
c'est-à-dire $a_{n+1} < \varphi$.
On a donc montré que $a_n < \varphi$ pour tout n.

L'inégalité $a_0 < \varphi$, avec $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, se conserve.
En effet, si $a_n < \varphi$ pour un certain n,
alors $\sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\varphi}$,
c'est-à-dire $a_{n+1} < \varphi$.
On a donc montré que $a_n < \varphi$ pour tout n.

Ceci prouve que l'intervalle $[-1, \varphi[$ est stable par f.

Donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1 + u_n} - u_n > 0$

et donc que (u_n) est croissante et majorée par φ.

Elle est donc convergente.

Enfin, la fonction f étant continue sur $[-1, \varphi]$, la suite converge vers un point fixe de f,

à savoir ici φ.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi$

Ceci prouve que l'intervalle $[-1, \varphi[$ est stable par f.
Donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1 + u_n} - u_n > 0$
et donc que (u_n) est croissante et majorée par φ.
Elle est donc convergente.
Enfin, la fonction f étant continue sur $[-1, \varphi]$, la suite converge vers un point fixe de f,
à savoir ici φ.
On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \varphi$

Ceci prouve que l'intervalle $[-1, \varphi[$ est stable par f.
Donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - u_n > 0$
et donc que (u_n) est croissante et majorée par φ.
Elle est donc convergente.
Enfin, la fonction f étant continue sur $[-1, \varphi]$, la suite converge vers un point fixe de f,
à savoir ici φ.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi$

Ceci prouve que l'intervalle $[-1, \varphi[$ est stable par f.
Donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1 + u_n} - u_n > 0$
et donc que (u_n) est croissante et majorée par φ.
Elle est donc convergente.
Enfin, la fonction f étant continue sur $[-1, \varphi]$, la suite converge vers un point fixe de f,
à savoir ici φ.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi$

Ceci prouve que l'intervalle $[-1,\varphi[$ est stable par f.
Donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - u_n > 0$
et donc que (u_n) est croissante et majorée par φ.
Elle est donc convergente.
Enfin, la fonction f étant continue sur $[-1,\varphi]$, la suite converge vers un point fixe de f,
à savoir ici φ.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \varphi$

Ceci prouve que l'intervalle $[-1, \varphi[$ est stable par f.
Donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1 + u_n} - u_n > 0$
et donc que (u_n) est croissante et majorée par φ.
Elle est donc convergente.
Enfin, la fonction f étant continue sur $[-1, \varphi]$, la suite converge vers un point fixe de f,
à savoir ici φ.
On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \varphi$

Ceci prouve que l'intervalle $[-1, \varphi[$ est stable par f.
Donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1 + u_n} - u_n > 0$
et donc que (u_n) est croissante et majorée par φ.
Elle est donc convergente.
Enfin, la fonction f étant continue sur $[-1, \varphi]$, la suite converge vers un point fixe de f,
à savoir ici φ.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi$

Plus généralement, on peut aussi parfois déterminer le sens de variation de la suite (u_n) par « conservation d'inégalités ». Supposons par exemple que f soit croissante. Alors la position de u_0 par rapport à u_1 va déterminer le sens de variation de la suite.

En effet, si $u_0 \leqslant u_1$, alors
$f(u_0) \leqslant f(u_1)$, c'est-à-dire
$u_1 \leqslant u_2$, etc :
on obtient donc par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n...
Et de même, $u_0 \geqslant u_1$ entraîne que la suite (u_n) est décroissante.

Plus généralement, on peut aussi parfois déterminer le sens de variation de la suite (u_n) par « conservation d'inégalités ». Supposons par exemple que f soit croissante. Alors la position de u_0 par rapport à u_1 va déterminer le sens de variation de la suite.

En effet, si $u_0 \leqslant u_1$, alors

$f(u_0) \leqslant f(u_1)$, c'est-à-dire

$u_1 \leqslant u_2$, etc :

on obtient donc par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n...

Et de même, $u_0 \geqslant u_1$ entraîne que la suite (u_n) est décroissante.

Plus généralement, on peut aussi parfois déterminer le sens de variation de la suite (u_n) par « conservation d'inégalités ». Supposons par exemple que f soit croissante. Alors la position de u_0 par rapport à u_1 va déterminer le sens de variation de la suite.

En effet, si $u_0 \leqslant u_1$, alors
$f(u_0) \leqslant f(u_1)$, c'est-à-dire
$u_1 \leqslant u_2$, etc :
on obtient donc par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n...
Et de même, $u_0 \geqslant u_1$ entraîne que la suite (u_n) est décroissante.

Plus généralement, on peut aussi parfois déterminer le sens de variation de la suite (u_n) par « conservation d'inégalités ». Supposons par exemple que f soit croissante. Alors la position de u_0 par rapport à u_1 va déterminer le sens de variation de la suite.

En effet, si $u_0 \leqslant u_1$, alors
$f(u_0) \leqslant f(u_1)$, c'est-à-dire
$u_1 \leqslant u_2$, etc :
on obtient donc par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n...
Et de même, $u_0 \geqslant u_1$ entraîne que la suite (u_n) est décroissante.

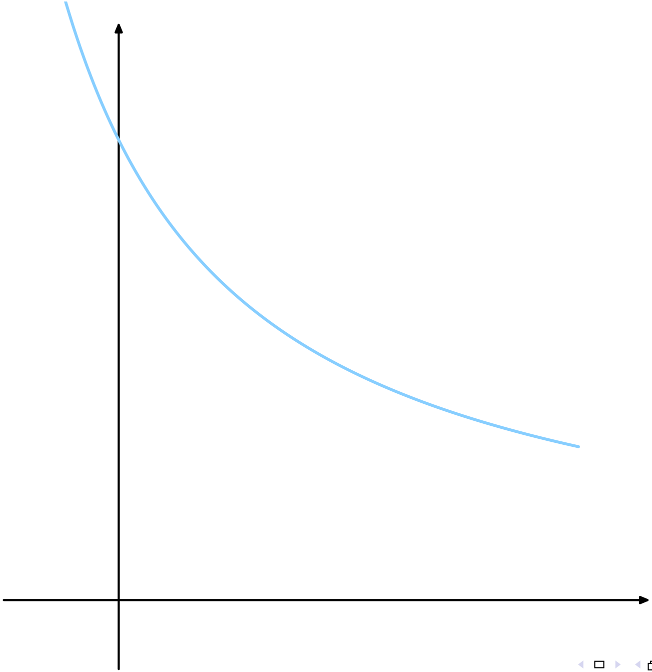
Plus généralement, on peut aussi parfois déterminer le sens de variation de la suite (u_n) par « conservation d'inégalités ». Supposons par exemple que f soit croissante. Alors la position de u_0 par rapport à u_1 va déterminer le sens de variation de la suite.

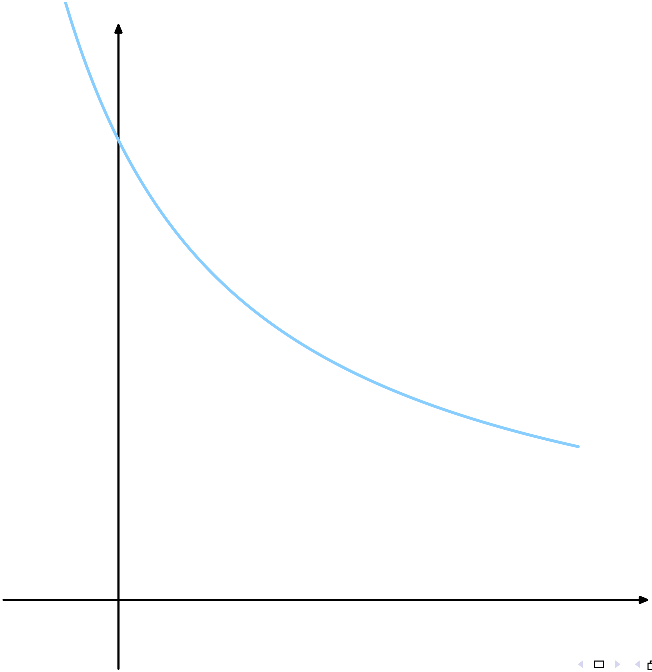
En effet, si $u_0 \leqslant u_1$, alors
$f(u_0) \leqslant f(u_1)$, c'est-à-dire
$u_1 \leqslant u_2$, etc :
on obtient donc par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n...

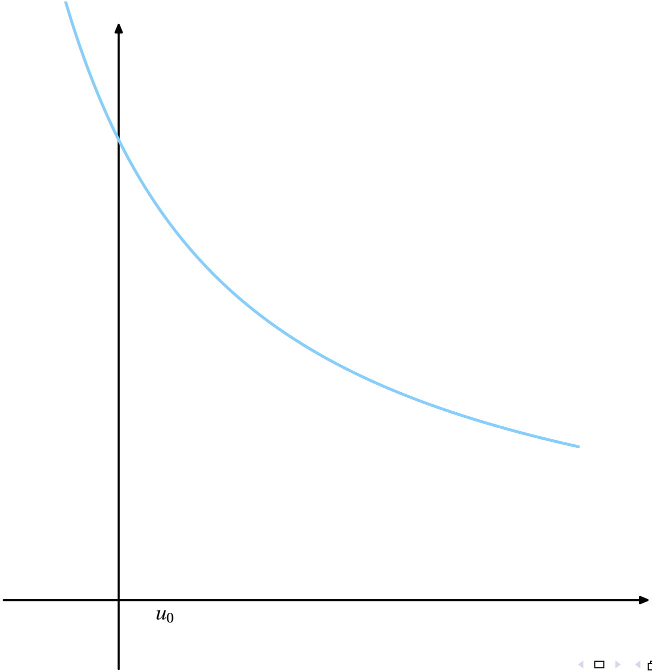
Et de même, $u_0 \geqslant u_1$ entraîne que la suite (u_n) est décroissante.

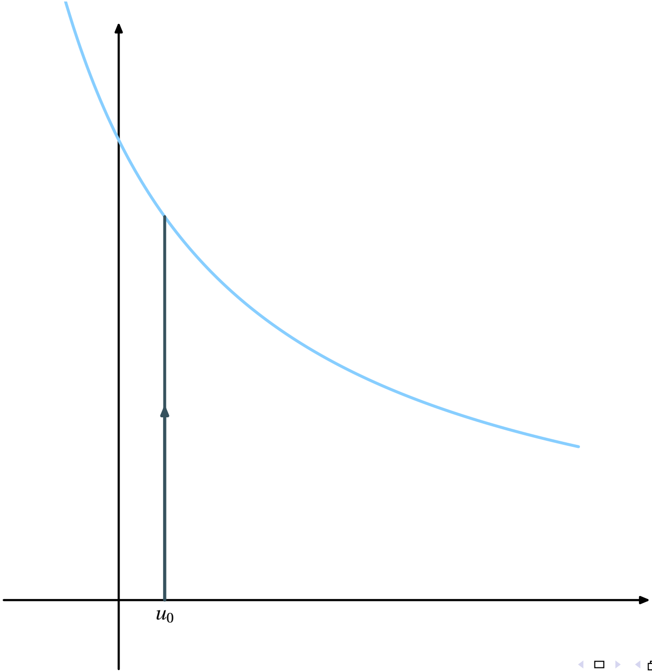
Plus généralement, on peut aussi parfois déterminer le sens de variation de la suite (u_n) par « conservation d'inégalités ». Supposons par exemple que f soit croissante. Alors la position de u_0 par rapport à u_1 va déterminer le sens de variation de la suite.
En effet, si $u_0 \leqslant u_1$, alors
$f(u_0) \leqslant f(u_1)$, c'est-à-dire
$u_1 \leqslant u_2$, etc :
on obtient donc par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n...
Et de même, $u_0 \geqslant u_1$ entraîne que la suite (u_n) est décroissante.

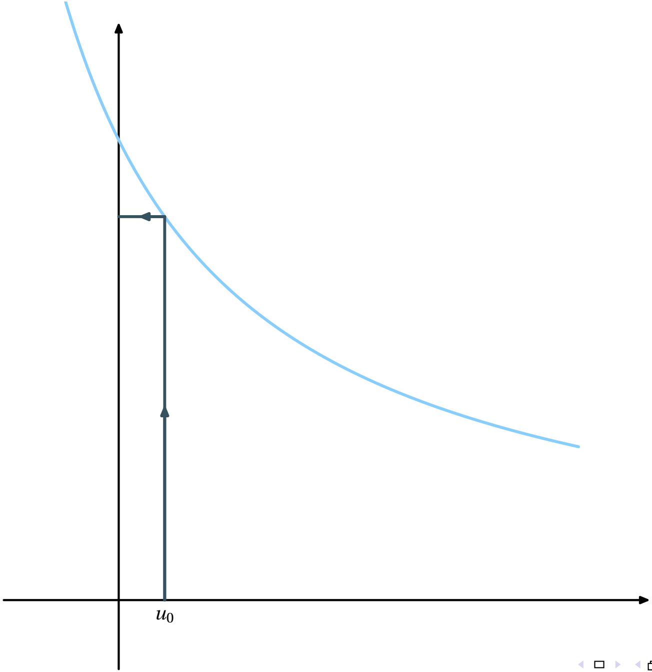
Si f est décroissante, les choses se compliquent un peu.

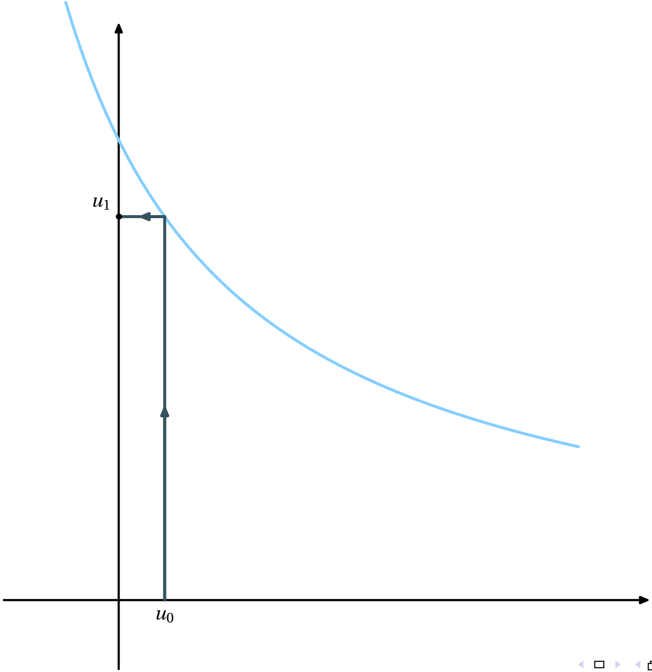


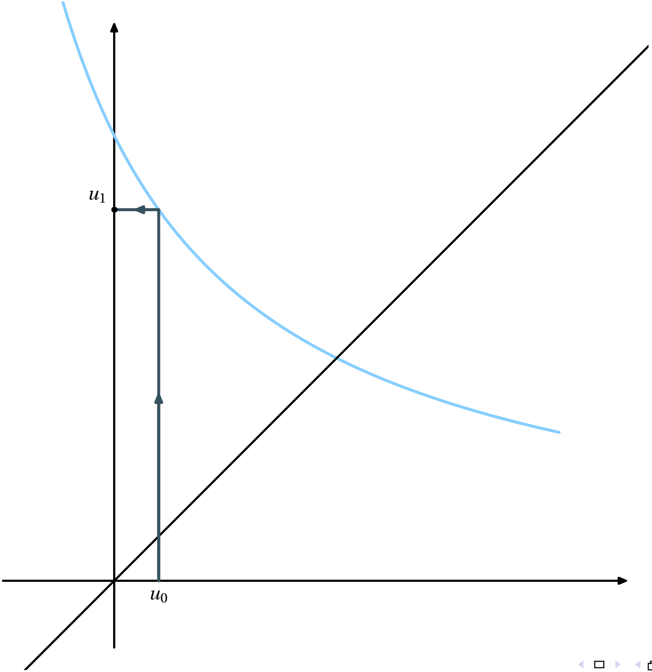



u_0

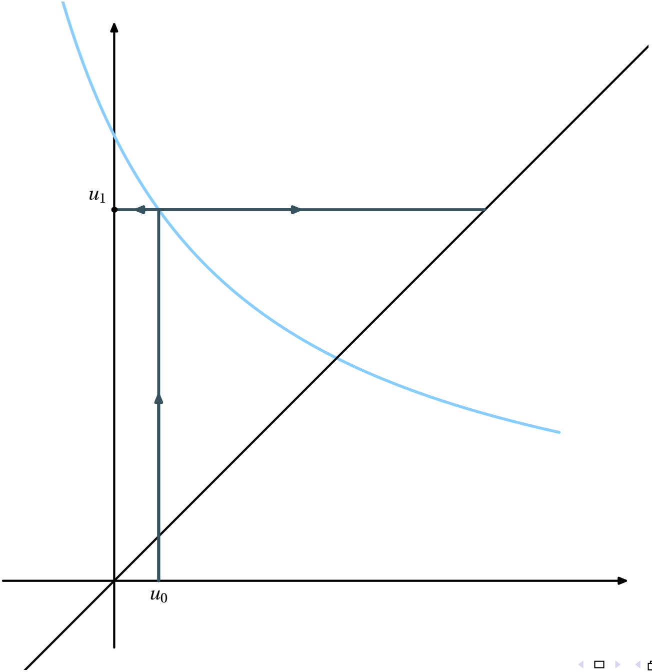

u_0

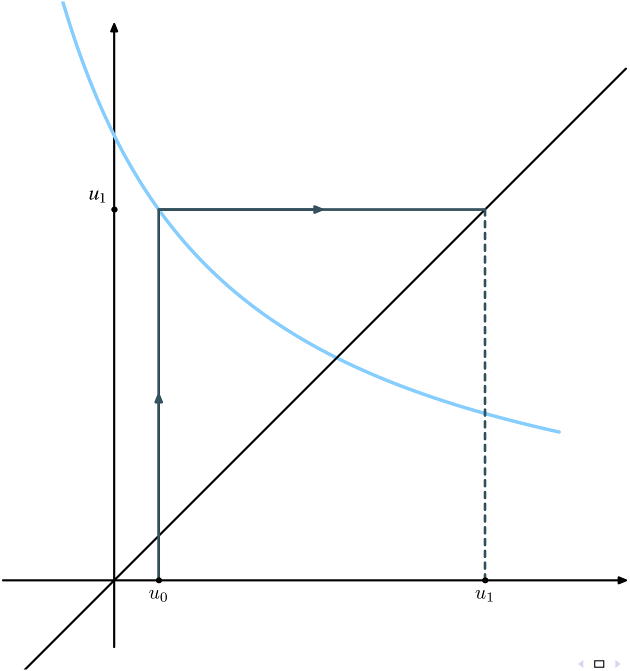

u_0

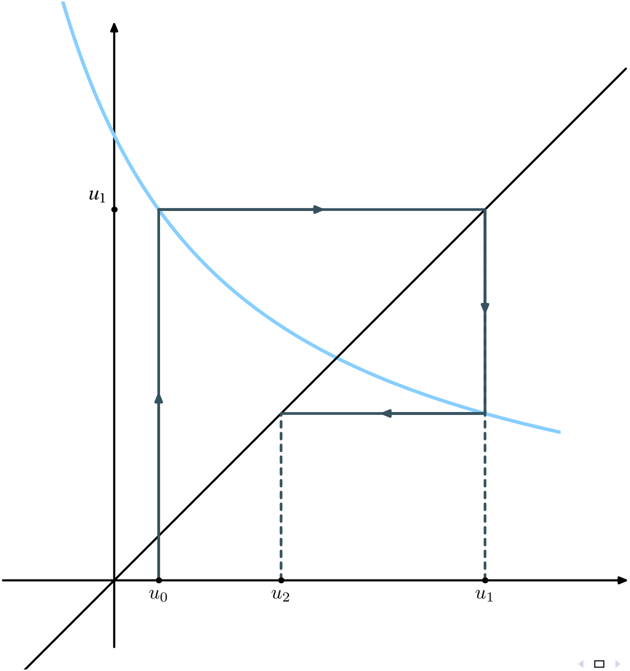

u_1
u_0

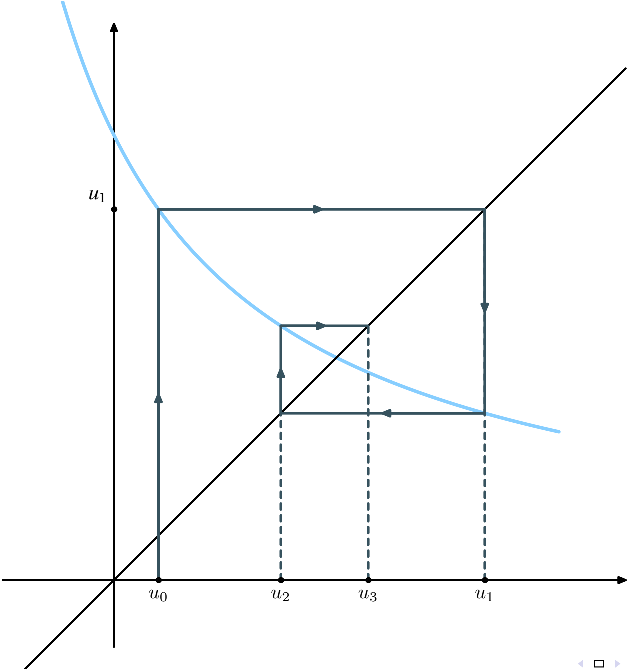


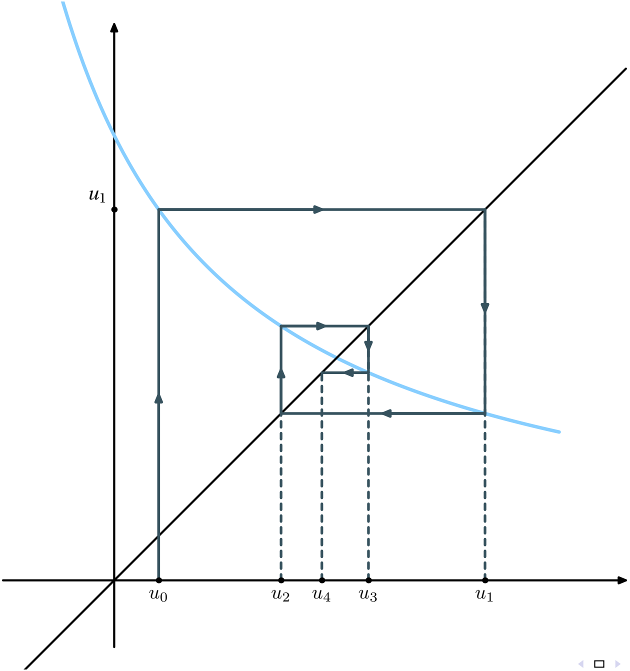
u_1
u_0


u_1
u_0

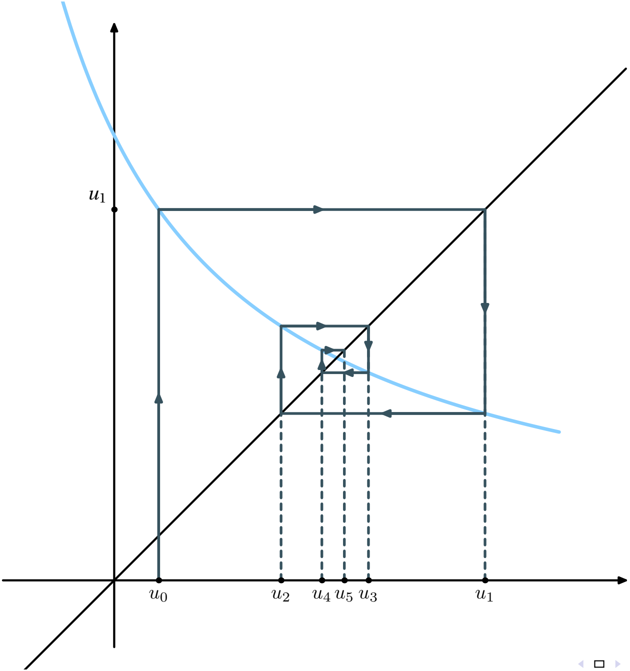

u_1
u_0
u_1

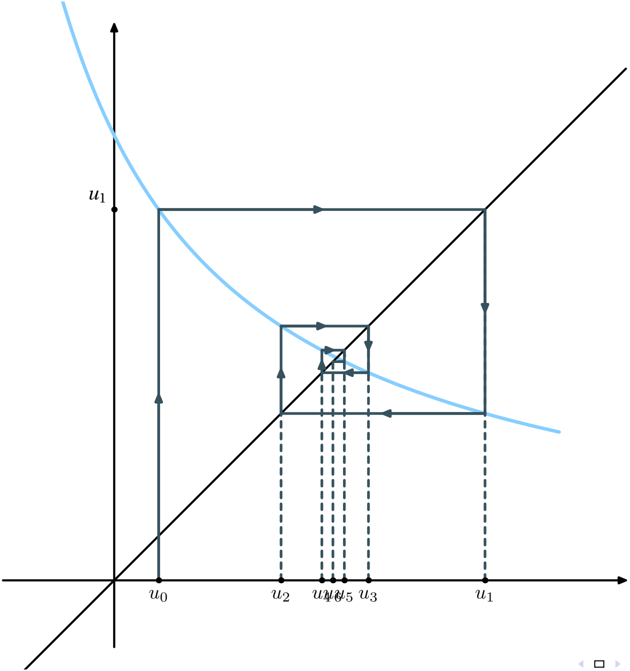

u_1
u_0
u_2
u_1


u_1
u_0
u_2
u_3
u_1



u_1
u_0
u_2
u_4
u_3
u_1


u_1
u_0
u_2
u_4
u_5
u_3
u_1



u_1
u_0
u_2
u_4
u_6
u_5
u_3
u_1

Enfin, si f n'est pas monotone, le comportement de (u_n) peut même être très compliqué, « chaotique ». Pour nous amuser, nous examinerons à l'aide de XCAS le comportement d'une suite telle que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \mu\, u_n (1 - u_n)$$

Voici quelques idées *simples* qui pourront vous guider dans votre étude d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Commencez par étudier la fonction f : si par chance elle est croissante sur un intervalle intéressant, vous pourrez prouver des inégalités intéressantes (en utilisant la conservation de l'ordre par f) et en particulier étudier le sens de variation de la suite selon que u_0 est supérieur ou inférieur à u_1.
- Vous serez le plus souvent amenés à prouver qu'une suite est monotone et bornée, donc convergente.
- Pour déterminer sa limite, on utilise le théorème bien connu. N'oubliez pas de vérifier toutes les conditions d'application, à savoir que la suite est définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, que f est continue de I vers I, I étant un intervalle fermé, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Voici quelques idées *simples* qui pourront vous guider dans votre étude d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Commencez par étudier la fonction f : si par chance elle est croissante sur un intervalle intéressant, vous pourrez prouver des inégalités intéressantes (en utilisant la conservation de l'ordre par f) et en particulier étudier le sens de variation de la suite selon que u_0 est supérieur ou inférieur à u_1.
- Vous serez le plus souvent amenés à prouver qu'une suite est monotone et bornée, donc convergente.
- Pour déterminer sa limite, on utilise le théorème bien connu. N'oubliez pas de vérifier toutes les conditions d'application, à savoir que la suite est définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, que f est continue de I vers I, I étant un intervalle fermé, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

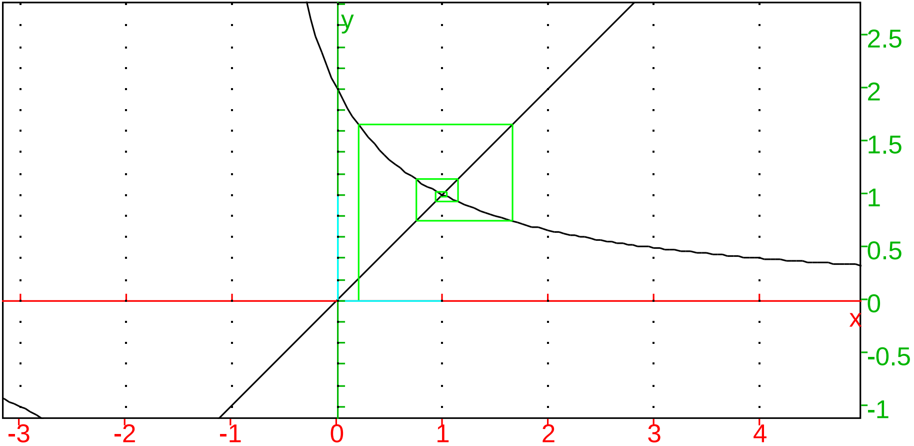
Voici quelques idées *simples* qui pourront vous guider dans votre étude d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Commencez par étudier la fonction f : si par chance elle est croissante sur un intervalle intéressant, vous pourrez prouver des inégalités intéressantes (en utilisant la conservation de l'ordre par f) et en particulier étudier le sens de variation de la suite selon que u_0 est supérieur ou inférieur à u_1.
- Vous serez le plus souvent amenés à prouver qu'une suite est monotone et bornée, donc convergente.
- Pour déterminer sa limite, on utilise le théorème bien connu. N'oubliez pas de vérifier toutes les conditions d'application, à savoir que la suite est définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, que f est continue de I vers I, I étant un intervalle fermé, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Pour vous aider à visualiser la situation, n'hésitez pas à faire appel à XCAS grâce à la fonction

```
plotseq( f(x),u0,n) )
```

```
plotseq(2/(x+1),0.2,6)
```



Exos

Représentation