Colle n° 7
Algèbre générale

I - Structure de groupe abélien

a. Premier exemple commenté

Vous savez tous ce qu'est un groupe abélien...
Prenons par exemple $\mathbb{Z}$ muni de l'opération $\perp$

$$\perp : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a+b-37 \end{array}$$

C'est bien sûr un cas évident mathématiquement, mais cela nous permettra de nous concentrer d'abord sur l'aspect MAPLE du problème.

Loi interne

On commence par indiquer l'existence de notre loi binaire

```
f:=(a,b)->a+b-37;
```

Ensuite on explique que a et b sont des entiers

```
assume(a,integer); assume(b,integer);
```

On vérifie que $a \perp b$ l'est aussi

```
is(f(a,b),integer);
```

Commutativité

On utilise **evalb**(`test`) qui indique si `test` est vrai ou faux (eval Boolean)

```
evalb(f(a,b)=f(b,a));
```

Associativité

Il faut vérifier que $(a\perp b)\perp c = a\perp(b\perp c)$ pour tout triplet (a,b,c) d'entiers.

```
evalb(f(f(a,b),c)=f(a,f(b,c)));
```

Élément neutre

On cherche un élément e vérifiant $a\perp e = e\perp a = a$ pour tout entier a.

```
e:=solve(f(a,x)=a,x);
```

Symétrique

On vérifie que chaque entier admet un symétrique s vérifiant $a \perp s = s \perp a = e$ et appartenant à $\mathbb{Z}$

```
s:=solve(f(a,x)=e,x);
is(s,integer);
```

b. À vous de jouer

Vérifiez si $(\mathrm{E}, \star)$ est un groupe dans les cas suivants

1. $\mathrm{E} =]-1;1[$ avec $\star : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy} \end{array}$

2. $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ avec $\star : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \star y = xy - 2(x+y) + 6 \end{array}$

3. $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ avec $\star : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \star y = x + y - 2x^2y^2 \end{array}$

II - Corps

Dans la même veine, vous allez pouvoir vérifier si $(\mathrm{E}, \star, \sharp)$ est un corps dans les cas suivants :

1. $\mathrm{E} = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$ avec $\star$ et $\sharp$ sont l'addition et la multiplication usuelles des réels.

2. $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ avec $\star : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ (x,y) & \mapsto & x \star y = x + y - 1 \end{array}$ et $\sharp : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ (x,y) & \mapsto & x \sharp y = x + y - xy \end{array}$

III - Groupes finis

On considèrera par la suite un groupe multiplicatif $(\mathrm{G}, \cdot)$
Un groupe fini est tout simplement un groupe ayant un nombre fini d'éléments.
Un groupe fini est cyclique si chacun de ses éléments peut s'écrire comme une puissance d'un élément particulier g du groupe appelé générateur.
On appelle ordre de a le plus petit entier naturel non nul n vérifiant $a^n = 1_{\mathrm{G}}$

a. Racines n-ièmes de l'unité

Dans la suite, on notera $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité.
À l'aide des commandes **seq** et **exp**, donnez la *liste* des 10 racines 10-èmes de l'unité.

b. Procédure `ordre`

Construisez une procédure `ordre:=proc(k,U)` qui donne l'ordre du $k^{\text{ème}}$ élément de U.
Vous utiliserez `while`, <> qui veut dire $\neq$ et **evalc**(), cette dernière commande renvoyant la forme algébrique d'un nombre complexe.
Vous vous en servirez pour donner la liste des ordres de $\mathbb{U}_{10}$ par exemple.

c. Tables de multiplications...

Construisez les tables de multiplications (ou plutôt les tables de Pythagore) de $\mathbb{U}_3$.
Vous vous servirez intelligemment des lignes suivantes

```
A:=[seq([seq(evalc(U[i]*U[j]),j=1..n)],i=1..n)]:
T:=convert(A,array);
```

Déduisez-en que $\mathbb{U}_3$ est un groupe.
Écrivez une procédure `GroupeFini:=proc(n)` qui donnera $\mathbb{U}_n$, la liste des ordres des éléments et la table de Pythagore de $(\mathbb{U}_n, \cdot)$.
Est-ce que les $\mathbb{U}_n$ sont cycliques