TD 9&10 : Fractions rationnelles

Vocabulaire - Forme de la décomposition

Exercice 1 Pôles

On pose

$$\mathrm{F}(h) = \frac{5\,h^3 - 2\,h^2 + 4\,h - 3}{h^3\,(h-1)}$$

Quels sont les pôles de $\mathrm{F}(h)$? Cette fraction admet-elle une partie entiere?
Sachant que :

$$(h-1)\,(h^2 - h + 3) + 4\,h^3 = 5\,h^3 - 2\,h^2 + 4\,h - 3$$

déduire une écriture de $\mathrm{F}(h)$ sous forme de somme de 4 fractions dont trois de pôle 0

Exercice 2 Pôles complexes - Partie entière

$$\mathrm{G}(x) = \frac{2\,x^3 + 3\,x^2 + 21\,x - 5}{x^2 + 2\,x + 10}$$

Quels sont les pôles complexes de G ? Déterminer la partie entière de G .

Exercice 3 Pôles - Partie entière - Éléments de 1ère et 2ème spèce
On pose :

$$f(t) = \frac{t^3}{(t^2 + 2\,t + 2)^2}$$

La fraction f a -t-elle des pôles réels? Quels sont les pôles complexes de f, quel est leur ordre?
Faire la division euclidienne de t^3 par $t^2 + 2\,t + 2$ En déduire une écriture de $f(t)$ sous forme de somme de deux fractions dont les dénominateurs soient des puissances (éventuellement 1) de $t^2 + 2\,t + 2$ avec des numérateurs de degré 1 . Comment nomme-t-on de telles fractions?

Exercice 4 Éléments de 1ère et 2ème espèce

On donne la décomposition suivante :

$$\frac{5\,x^4 + 5\,x^3 + 104\,x^2 - 70\,x + 333}{(x-2)\,(x^2 + 2\,x + 19)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2\,x - 5}{(x^2 + 2\,x + 19)^2} + \frac{4\,x + 1}{x^2 + 2\,x + 19}$$

Donner les éléments de première espèce de cette décomposition et ceux de seconde espèce.

Exercice 5 Forme de la décomposition

Pour chacune des fractions suivantes

- ▷ dire si sa partie entière est nulle ou pas , dans la négative donner son degré
- ▷ donner les diviseurs irréductibles du dénominateur dans $\mathbb{R}$ ainsi que leur puissance
- ▷ donner la liste des diviseurs primaires (les A^k où A est irreductible) du dénominateur
- ▷ En déduire la forme de la décomposition dans $\mathbb{R}$

On ne fera aucun calcul et on se bornera à donner la forme.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{2\,x^4 - 3\,x + 7}{(x^2 + 2)\,(x-1)} \quad \mathrm{g}(t) = \frac{t^2 - t - 5}{(t+2)^2\,(t-1)} \quad \mathrm{h}(p) = \frac{p^6}{(p^2 + 4\,p + 13)\,(p^2 + 9)}$$

$$\mathrm{q}(x)=\frac{3\,x^2-5\,x+11}{(x^2-1)\,(x^2+4)^2}\qquad \mathrm{r}(s)=\frac{4\,s^4-s^2}{(s-1)^3\,(s^2-10\,s+26)}$$

Exercice 6 Parirté

Soit $\mathrm{F}(x)$ une fraction rationnelle de pôles simples 2 et -2 : $\mathrm{F}(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$
Quelle relation existe-t-il entre a et b si F est paire ? impaire ?

Pratique de la décomposition

Exercice 7 Avec des pôles simples dans $\mathbb{R}(\mathbf{X})$
Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ $F(x)=\dfrac{5x-9}{(x+3)(x-8)}$ $\quad G(t)=\dfrac{t}{(t-1)(t+1)(t+3)}$

Exercice 8 Avec des pôles simples dans $\mathbb{C}(\mathbf{X})$

1) Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ $H(z)=\dfrac{z^3}{z^2+9}$
2) Soit $F(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2-x^2}$ avec $x\in\mathbb{R}$.
   a) Déterminer les pôles complexes de F. On posera $J=e^{2j\pi/3}$. Donner alors la forme de la décomposition de F dans $\mathbb{C}$.
   b) Étudiez la parité de F. Conséquences ?
   c) Comme $F(x)\in\mathbb{R}$, que pensez-vous de $\overline{F(x)}$? Conséquences ?
   d) Déterminez alors la décomposition de F dans $\mathbb{C}(X)$.
   e) Calculer $(x-J)(x-\overline{J})$ puis $(x+J)(x+\overline{J})$.
   f) En déduire la décomposition de f dans $\mathbb{R}(X)$ sous la forme

$$F(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

Exercice 9 Avec des éléments de deuxième espèce

Reprenons l'exemple précédent $F(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2-x^2}$ dont la décomposition s'écrit dans $\mathbb{R}(X)$ sous la forme

$$F(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

En étudiant la parité de F et en prenant deux valeurs particulières retrouvez le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 10 Avec des pôles multiples

1) Décomposez $F(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^4(x+1)}$ en utilisant une division selon les puissances croissantes.
2) Soit $G(t)=\dfrac{t^2+10t-18}{(t-2)^2(t+1)}$. On peut utiliser la méthode précédente. Mais l'ordre maximum étant 2, on peut opérer différemment.
   a) Notons $G(t)=\dfrac{a}{(t-2)^2}+\dfrac{b}{t-2}+\dfrac{c}{t+1}$. Déterminez a et c par les méthodes habituelles.
   b) Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ de deux façons et concluez.

Avec Xcas : il suffit d'utiliser la commande `partfrac()` pour obtenir les résultats demandés.