TD 11, 12, 13 &14 : Intégration

Intégration sans primitive

Exercice 1 Calculs de collège...

Calculez les intégrales suivantes, après avoir fait un petit dessin.

$$\mathrm{I}_1 = \int_a^b k\,dx \text{ avec } k>0 \qquad \mathrm{I}_2 = \int_0^4 (3-x)\,dx \qquad \mathrm{I}_3 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Exercice 2 Fonctions périodiques, paires, impaires

Sans utiliser de primitives, calculez les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_{\pi/32}^{65\pi/32} \sin t\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_{-\pi/32}^{\pi/32} \sin t\,\mathrm{d}t$ d) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{32} t\,\mathrm{d}t$

Exercice 3 Intégrale de fonction non continue

Calculez $\displaystyle\int_0^{32} \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x. Calculez ensuite $\displaystyle\int_0^{32,32} \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 Intégrale de fonction affine par morceaux

Nous avions étudié la fonction Λ au cours du TD 3 définie par

$$\Lambda(x) = x\mathscr{U}(x) - 2(x-1)\mathscr{U}(x-1) + (x-2)\mathscr{U}(x-2) \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{U}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 1 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Calculez alors $\displaystyle\int_{-3232}^{32323232} \Lambda(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 5 Calcul par encadrements

Étudiez la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$.

Vous pourrez commencer par encadrer e^{-x} sur $[n,n+1]$ en fonction de n.

Exercice 6 Intensité efficace d'un courant sinusoïdal

On considère un courant sinusoïdal d'intensité $i = i_0 \sin(\omega t)$ avec $T = {}^{2\pi}/_{\omega}$ On définit la valeur efficace $\mathscr{E}$ de i par

$$\mathscr{E} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i_0^2 \sin^2(\omega t)\,dt}$$

Calculez $\mathscr{E}$ en utilisant la formule $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ et sans utiliser de primitive.

Exercice 7 Centre de gravité d'une plaque plane homogène

Pour un système matériel composé de n points $M_1, M_2, \cdots, M_n$ de masses respectives $m_1, m_2, \cdots m_n$, le centre de gravité est défini par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}$$

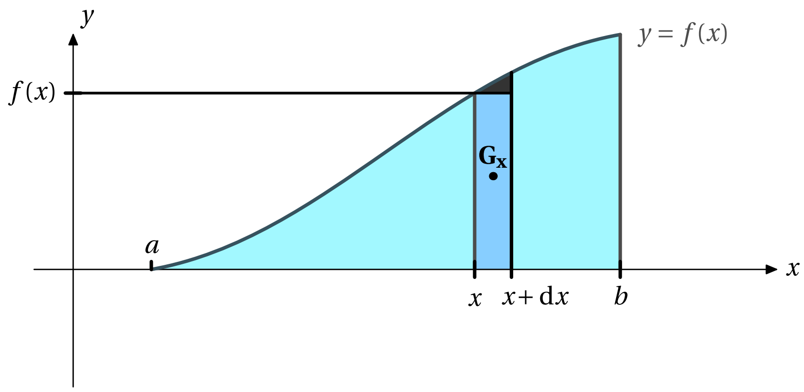
avec M la masse totale du système : $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Si on travaille dans le plan, on obtient donc les coordonnées du centre de gravité grâce aux formules

$$x_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad y_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Les choses se compliquent lorsqu'on cherche les coordonnées du centre de gravité d'une plaque homogène : on ne peut pas recenser tous les points formant la plaque !

Nous prendrons comme masse surfacique $\rho = 1$ unité de masse/unité de surface. Supposons que la plaque a la forme ci-dessous



Considérons la petite section de la plaque représentée ci-dessus entre les abscisses x et $x + dx$. Comme d'habitude, on va assimiler cette section à un rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur infiniement petite dx.

Alors, la masse du rectangle vaut $\rho \times f(x) \times dx = f(x)\,dx$.

Les coordonnées du centre d'inertie partiel G_x de cette petite plaque sont assimilées à $x_{G_x} \simeq x$, $y_{G_x} \simeq {}^{f(x)}/_{2}$.

En vous inspirant des méthodes vues en cours, expliquez pourquoi on obtient

$$x_G = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \qquad y_G = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Nous utiliserons ces formules un peu plus loin dans le TD. Nous généraliserons ces résultats après avoir étudié les intégrales multiples.

Calcul des intégrales

Exercice 8 Primitives usuelles

$$\int x^n \,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x =$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x =$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} =$$

$$\int \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x =$$

$$\int \operatorname{sh} x \,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} =$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x =$$

Exercice 9 Primitives moins usuelles

$$\int \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int \tan t \,\mathrm{d}t =$$

$$\int \tan^2 t \,\mathrm{d}t =$$

$$\int \cos^2 t \,\mathrm{d}t =$$

$$\int \ln t \,\mathrm{d}t = \text{(Ipp)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \text{(Posez } t = \tan(t/2)\text{)}$$

Exercice 10 Intégration par parties

a) $\displaystyle\int_1^e x^n \ln x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin} t \,\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} u \operatorname{Arctan} u \,\mathrm{d}u$

d) $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{-x} \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \cos t \,\mathrm{d}t$

f) $\displaystyle\int_0^1 e^{at} \cos(bt) \,\mathrm{d}t$

Exercice 11 Transformée de Fourier du signal $s(t) = \cos(\pi t)\Pi(t)$

Il s'agit de calculer l'intégrale $\mathrm{X}(s) = 2\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi t)\cos(2\pi f t)\,dt$ où f est un paramètre positif.

Exercice 12 Transformée de Laplace de la fonction rampe

On pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^x t e^{-pt}\,dt$ où p est un paramètre réel. Calculez $\mathrm{I}(x)$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}(x)$ en discutant selon les valeurs du paramètre p.

Exercice 13 Changement de variable

a) $\displaystyle\int_{-3}^{\sqrt{3}} \frac{du}{16+u^2}$

b) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad (u = \sqrt{t})$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x \quad (x = \ln t)$

d) $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{t^2}\,\mathrm{d}t \quad (x = t^2)$

Exercice 14 Calcul d'intégrales de fonctions trigonométriques par linéarisation

1. En utilisant de bonnes formules trigonométriques, linéarisez $\cos(3t)\cos(5t)$.

2. Utilisez les formules d'Euler pour linéariser $\sin^3(t)$

3. Calculez $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/8} \cos(3t)\cos(5t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(4t)\sin^3(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(4t)\sin^4(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 15 Changements de variables trigonométriques

Rappel : règles de Bioche. Soit $\mathrm{F}(\sin x, \cos x)$ une « fraction rationnelle en cos et sin » alors on calcule $\int \mathrm{F}(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ en effectuant un changement de variable selon les régles suivantes : si $\mathrm{F}(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ est invaraint quand on change

- ▷ x en $\pi - x$, alors on effectue le changement de variable $\sin x = t$
- ▷ x en $-x$, alors on effectue le changement de variable $\cos x = t$
- ▷ x en $\pi + x$, alors on effectue le changement de variable $\tan x = t$

Si aucun changement ne fonctionne, on pose $\tan(x/2) = t$.

Calculez alors les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u}$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$ (⚠)

Exercice 16 Intégration de fractions rationnellles

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$ g) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(3t)}{\sin^2 t+1}\,\mathrm{d}t$ j) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^4 x\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t-3}$ e) $\displaystyle\int_{-1/2}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+2}$ h) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+\cos x+2}\,\mathrm{d}x$ k) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(2u)}{1+\sin^2 u}\,\mathrm{d}u$

c) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{x^4+4}\,\mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^3 x\,\mathrm{d}x$ l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 17 Moment de flexion d'une poutre

On considère une poutre horizontale chargée et en appui sur deux murs verticaux. La poutre a pour longueur ℓ (en mètre). On la munit d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}\,)$ d'unité graphique 1 m.

Au point d'abscisse x $(0 \leqslant x \leqslant \ell)$, le moment de flexion $f(x)$ est donné par l'intégrale

$$f(x) = \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t$$

où g est une fonction dépendant de la forme de la charge de la poutre. Calculez $f(x)$ dans les cas suivants :

1. $g(t) = 1000(t^2+1)$

2. $g(t) = 500e^{2t}$

Exercice 18 Discrétisation d'une équation différentielle

Quel est le problème?

Soit (E) l'équation différentielle $x'(t)+3x(t)=2$, $x(0)=1$. Nous savons parfaitement résoudre cette équation (nous reverrons cette équation étudiée en Terminale au second semestre). Nous allons voir une méthode qui va vous paraître beaucoup plus compliquée, mais qui s'avérera fort utile quand il s'agira de résoudre des équations différentielles plus sophistiquées où les méthodes habituelles de résolution ne nous permettront plus de conclure mais que vous rencontrerez au hasard de votre carrière de technicien ou d'ingénieur.

Nous allons « observer » la solution de l'équation à intervalle de temps régulier : la période d'échantillonnage qu'on notera T_e. On fixera par exemple $\mathrm{T}_e = 0{,}2\,s$.

Nous allons intégrer l'équation (E) sur une période d'chantillonnage quelconque, c'est à dire sur un intervalle $[k\mathrm{T}_e, (k+1)\mathrm{T}_e]$, avec k un entier naturel. Cela donne, grâce à la linéarité de l'intégration :

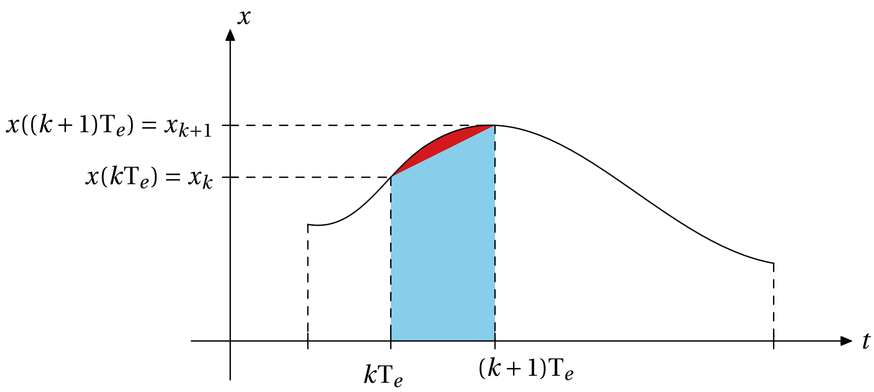
$$\int_{k\mathrm{T}_e}^{(k+1)\mathrm{T}_e} x'(t)\,dt + 3\int_{k\mathrm{T}_e}^{(k+1)\mathrm{T}_e} x(t)\,dt = 2\int_{k\mathrm{T}_e}^{(k+1)\mathrm{T}_e} dt$$

On définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $x_k = x(k\mathrm{T}_e)$.

Calculez le premier terme du premier membre ainsi que le second membre de l'équation : pas de problème.

Plus compliqué va être de calculer $\int_{k\mathrm{T}_e}^{(k+1)\mathrm{T}_e} x(t)\,dt$ car nous ne connaissons pas x, donc encore moins une de ses primitives. Nous allons malgré tout nous en tirer en déterminant une approximation du résultat.

Méthode des trapèzes



Il semble raisonnable de penser que plus T_e sera petit, plus l'aire rouge le sera également et donc meilleure sera l'approximation. Vous aurez également noté que cette méthode est encore plus précise que celle des rectangles vue en cours au moment de l'étude des sommes de Darboux.

Maintenant, en vous souvenant de la formule $\mathscr{A}(\text{trapèze}) = \dfrac{(\text{petite base}+\text{grande base})\times\text{hauteur}}{2}$, donnez l'aire du trapèze bleu.

Équation aux différences

Déduisez-en que la suite (x_n) vérifie l'équation aux différences (F)

$$\frac{13}{10}x_{n+1} - \frac{7}{10}x_n = \frac{2}{5}$$

Vous reconnaissez une suite arithmético-géométrique. En déterminant la solution α de l'équation $\dfrac{13}{10}x - \dfrac{7}{10}x = \dfrac{2}{5}$ et en étudiant la suite définie par $v_n = x_n - \alpha$, exprimez x_n en fonction de n.