

I - Préambule : approximation du nombre dérivé

Commentez ces instructions et leurs résultats...

```
>deriv:=proc(f,h)
  x->(f(x+h)-f(x))/h
end:
>deriv_n:=proc(f,h,n)
  if n=0 then f
  else deriv_n(deriv(f,h),h,n-1)
  fi;
end:
>deriv(sin,0.001)(0);
>deriv_n(sin,0.00001,10)(0);
```

II - Résolution d'équations différentielles par discrétisation

a. Principe

On considère une équation différentielle ordinaire (EDO pour les intimes) $u'(t) = f(t, u(t))$. Lorsqu'on ne connaît pas de solution exacte à cette EDO, on essaye d'en avoir une bonne approximation par des méthodes numériques.

Nous ne nous pencherons pas ici sur le problème d'existence de solutions : nous supposons que f a les propriétés qui font des solutions existents là où il faut...

a. Notamment celle de Runge-Kutta qu'utilise d'ailleurs Maple

b. On estime l'intensité des radiations émises par un corps radioactif en mesurant la concentration $u(t)$ d'un isotope instable. Soit τ sa demi-vie. Alors $u'(t) = \alpha \cdot u(t)$ avec $\alpha = -\frac{\ln 2}{\tau}$

Nous allons par exemple « observer » u à intervalle de temps régulier : notons h cette période d'échantillonnage.

Nous allons essayer d'obtenir une suite d'approximations u_n de $u(t_n)$ et d'évaluer la pertinence de cette approximation, le principe étant résumé sur la figure 1 de la présente page

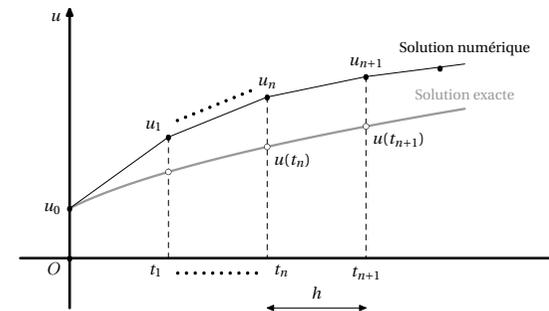


FIGURE 1 – Principe de discrétisation d'une EDO

Deux grandes possibilités s'offrent à nous pour « se débarrasser » de u' :

- soit remplacer une courbe par sa tangente, c'est à dire utiliser une approximation affine de u . On remplacera alors $u'(t)$ par une fonction dépendant de u et ainsi obtenir une relation de récurrence définissant la suite (u_n) .
- soit intégrer l'EDO : nous n'aurons plus de u' ... mais il faudra calculer une intégrale ! Nous pourrions alors utiliser des méthodes d'approximation d'intégrales : méthodes des rectangles, des trapèzes, etc.

b. Découverte de la méthode d'Euler sur un exemple

Cette méthode, que vous avez dû étudier au lycée, a pour idée directrice de remplacer localement une courbe par sa tangente. Il y a des méthodes plus efficaces^a, mais pour l'instant hors de notre portée mathématique.

Soit donc u une fonction dérivable sur un intervalle $I = [a; b]$ vérifiant $u(0) = 1$ et, pour tout t , $u'(t) = \alpha \cdot u(t)$ (oui, oui, c'est bon, moi aussi je sais qui c'est, on n'a pas besoin de Maple pour ça, mais mieux vaut découvrir sur un exemple simple ^b...).

I : nous le découperons en n intervalles de longueur $1/n$.

Soit t_n un élément de $]a; b[$ tel que, pour h un réel strictement positif suffisamment « voisin » de 0, $t_n + h$ soit encore dans I . On peut alors considérer que le quotient

$$\frac{u(t_n + h) - u(t_n)}{h}$$

réalise une approximation d'autant plus valable de $u'(t_n)$ que h est petit.

Que devient alors notre EDO « approchée » ? En d'autres termes, trouver une relation de récurrence définissant (u_n) .

Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Version impérative

On va construire à présent une procédure `eu:=proc(alpha,N,a,b)` qui ressemblera à

```
>euler_imp:=proc(alpha,N,a,b,u0)
  local ...:
  h:=(b-a)/N; // le pas régulier
  y:=u0; // y=u(0) au départ
  x:=a; // x=a au départ
  S:=[x,y]; // on créé le point de départ

  for k from ... to N do
    x:=x+h; // on avance d'un pas

    ...

    S:=S,[x,y]: // on rajoute le nouveau point à notre liste
  od:

  plot([S]);
end:
```

Regardez par exemple

```
> euler_imp(-4,6,0,3,1);
> euler_imp(-4,24,0,3,1);
```

et commentez...

Version récursive

Écrivez à présent une version récursive de cette méthode du style :

```
>euler_rec:=proc(alpha,x,xmax,y,h,liste)
  if x>=xmax then liste
  else euler_rec(...)
  fi;
end:

>trace_euler_rec:=proc(alpha,xo,xmax,yo,h)
  plot(...)
end:
```

c. Méthode d'Euler : généralisation

Oui, c'est bien beau, mais l'intérêt de l'informatique c'est de régler des cas les plus généraux possibles.

Donc réfléchissons un peu ... $u'(t) = f(u(t),t)$ et $u'(t) \approx \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$...

en impératif...

```
...
for k from 1 to N do
  x:=x+h;
  y:=y+f(y,x)*h;
  S:=S,[x,y]:
od:
...
```

en récursif..

```
>euler_gen_rec:=proc(f,x,xmax,y,h,liste)
  if x>=xmax then liste
  else euler_gen_rec(...)
  fi;
end:

>trace_euler_gen_rec:=proc(f,xo,xmax,yo,h)
  plot(...)
end:
```

d. Méthode d'Euler : équations différentielles d'ordre 2

Le but de notre nouveau jeu va être de discrétiser une équation différentielle du second ordre, de tracer le graphe correspondant. Nous utiliserons le fait que pour une fonction y deux fois dérivable sur un intervalle I et h proche de 0, on a

$$y(x+h) \approx y(x) + y'(x) \times h$$

et donc

$$y'(x+h) \approx y'(x) + y''(x) \times h$$

Il s'agit maintenant de mettre au point une procédure impérative `EquaDiff:=proc(f, xmin, xmax, y0, yp0, N)` où $y_0 = y(0)$, $yp_0 = y'(0)$ et f est la fonction de 3 variables définie par $y'' = f(y', y, x)$

Une difficulté devrait apparaître due à l'aspect chronologique des affectations. Vous pourrez alors introduire une variable du type `ytemp` ou `yptemp`.

Vous en donnerez ensuite une version récursive.

Il ne restera plus qu'à tester vos procédures sur les nombreuses équations différentielles du second ordre que vous avez résolues en cours avec Madame Gornet.

e. Méthode du point milieu

Les anglo-saxons l'appellent schéma *Leapfrog*^c

En fait, pour une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle $[a; b]$, l'idée est d'approcher la pente entre les points de coordonnées $(t-h, u(t-h))$ et $(t+h, u(t+h))$ par $u'(t)$.

Quand vous aurez étudié les formules de Taylor, vous pourrez montrer que l'approximation obtenue est meilleure puisque d'ordre 2, alors que la méthode d'Euler donne une approximation d'ordre 1.

Modifiez une des procédures précédentes pour utiliser cette méthode. Attention !

Il y a trois niveaux de récurrence...

```
x:=a;
ymoins:=u0;
y:=ymoins+h*f(ymoins,x);
for k from 1 to N do
x:=a+k*h;
yplus:=ymoins+2*h*f(y,x);
P(k):=[x+h,yplus];
S:=S,P(k);
ymoins:=y;
```

c. Pourquoi ce nom?...

```
y:=yplus;
od:
```

Observez :

```
Mil((u,t)->-2*u+t,200,0,3,1);
Mil((u,t)->-2*u+t,600,0,3,1);
Mil((u,t)->4*u+t,200,0,3,1);
```

MORALITÉ : l'approche intuitive de la notion de limite ($dx \approx \Delta x$) permet de modéliser facilement certaines situations, mais si on pousse un peu, on ne peut se passer d'une théorisation rigoureuse pour expliquer certaines anomalies. Analyse numérique ne veut donc pas dire bidouillage... L'étude de l'estimation des erreurs commises doit être menée avec le plus grand soin mais est encore hors de notre portée.

Du point de vue informatique, un autre facteur doit être pris en compte : la vitesse de convergence, pour ne pas avoir à attendre quelques siècles le résultat de la compilation...

f. À partir de l'intégration numérique

Premier exemple

Soit (E) l'équation différentielle $u'(t) + 3u(t) = 2$, $u(0) = 1$. Nous savons parfaitement résoudre cette équation. Nous allons encore voir une méthode qui va vous paraître beaucoup plus compliquée, mais qui s'avérera fort utile quand il s'agira de résoudre des équations différentielles plus sophistiquées où les méthodes habituelles de résolution ne nous permettront plus de conclure mais que vous rencontrerez au hasard de votre carrière d'ingénieur.

Nous allons « observer » la solution de l'équation à intervalle de temps régulier : la période d'échantillonnage qu'on notera encore h . On fixera par exemple $h = 0,2s$. Nous allons intégrer l'équation (E) sur une période d'échantillonnage quelconque, c'est à dire sur un intervalle $[kh, (k+1)h]$, avec k un entier naturel. Cela donne, grâce à la linéarité de l'intégration :

$$\int_{kh}^{(k+1)h} u'(t) dt + 3 \int_{kh}^{(k+1)h} u(t) dt = 2 \int_{kh}^{(k+1)h} dt$$

On définit la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $u_k = u(kh)$.

Calculez le premier terme du premier membre ainsi que le second membre de l'équation : pas de problème.

Plus compliqué va être de calculer $\int_{kh}^{(k+1)h} u(t) dt$ car nous ne connaissons pas u , donc encore moins une de ses primitives. Nous allons malgré tout nous en tirer en déterminant une approximation du résultat.

Méthode des trapèzes

Observez la figure de la présente page

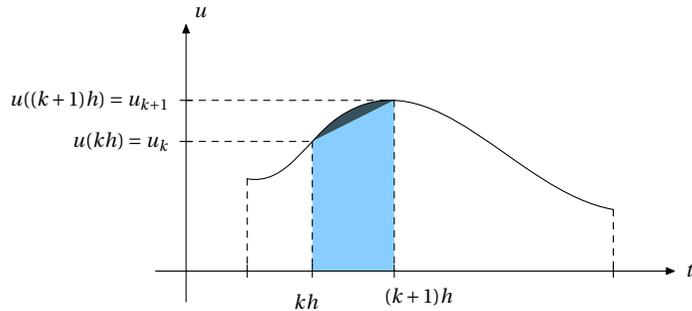


FIGURE 2 – Méthode des trapèzes

Il semble raisonnable de penser que plus h sera petit, plus l'aire sombre le sera également et donc meilleure sera l'approximation.

Maintenant, en vous souvenant de la formule

$$A(\text{trapèze}) = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$$

donnez l'aire du trapèze bleu.

Équation aux différences

Déduisez-en que la suite (u_n) vérifie l'équation aux différences (F)

$$\frac{13}{10}u_{n+1} - \frac{7}{10}u_n = \frac{2}{5}$$

Vous reconnaissez une suite arithmético-géométrique. Exprimez u_n en fonction de n .

Équation différentielle vs équation aux différences

Pour vérifiez si la solution de l'équation aux différences n'est pas très éloignée de la solution théorique, nous allons observer la solution de (E) toutes les $0,2$ s : on pose $y_n = f(nh)$. Donnez l'expression de y_n .

On s'attend à ce que u_n et y_n soient très proches mais pas égaux. En effet, le passage de (E) à (F) s'opère à l'aide d'une approximation (celle des trapèzes) et non d'une équivalence.

On pose $d_n = y_n - u_n$. À l'aide de Maple, dressez un tableau où figureront les 10 premiers termes des suites (u_n) , (y_n) et (d_n) . Cela vous rassure-t-il ?

Montrez que (d_n) est en fait la différence entre deux suites géométriques. Utilisez ce résultat pour confirmer ou infirmer votre conjecture.

Magie ?

Tout serait donc magique en maths, ou bien n'avez-vous été confronté(e) toute votre vie qu'à des problèmes truqués ?

Soit (E') l'équation différentielle $2u'(t) - 3u(t) = t$, $u(0) = 2$. Vous pouvez demander à Maple de vérifier que la solution de cette équation est la fonction s définie par

$$u(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{9} + \frac{20}{9}e^{3/2t}$$

Vous pourrez peut-être un jour montrer que la suite solution de l'équation aux différences associée à (E) est

$$u_n = \frac{20}{9} \left(\frac{43}{37} \right)^n - \frac{1}{30}n - \frac{2}{9}$$

On pose encore $d_n = y_n - u_n$. Pouvez-vous conclure comme dans l'exemple précédent ? Moralité ?

Comparaison avec la méthode d'Euler

Cette méthode est-elle plus précise que la méthode d'Euler vue précédemment ?

g. Généralisation

En dehors des équations linéaires, la généralisation devient extrêmement difficile... Nous nous contenterons donc des équations du style

$$u'(t) = \alpha u(t) + \beta t + \gamma$$

Écrivez donc une procédure ayant pour arguments α , β et γ , les bornes a et b de l'intervalle, le nombre N de « mailles du filet » et la valeur de $u(0)$.