MPS TP1: Les clés de détection d'erreur

Mathématiques

2nde / 2018-2019

1 Travail à faire

Des informations vous sont fournies dans ce document. Il s'agit ensuite d'écrire un compte-rendu donnant un maximum d'informations et comportant des démonstrations. Libre à vous d'imaginer le plan de ce compte-rendu et d'ajouter d'éventuelles informations complémentaires. Votre compte-rendu doit avoir un contenu mathématique...

2 Billets de banque

On a retrouvé sur la scène du crime des planches de faux billets japonais. On a également retrouvé des billets en euros qui semblent vrais ce qui inquiète les autorités françaises. Est-ce que les Yakusas sont en train d'introduire des faux billets en Europe ?

Regardez ces billets retrouvés due la scène du crime. Ils comportent un numéro.

Il y a en fait une lettre et onze chiffres. On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet. Pour le billet de 20 euros, Y est la 25e lettre. Donc le numéro est en fait

$$2\,500\,309\,901\,015$$

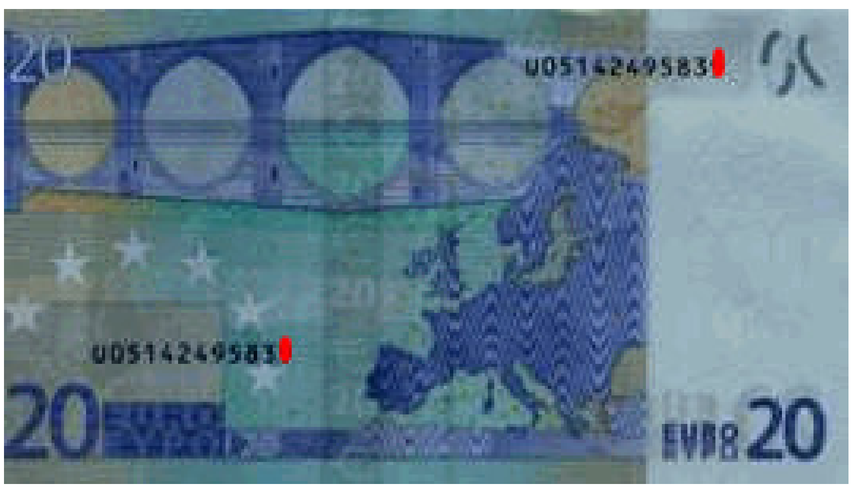
Il faut savoir que **les numéros des billets en euros ont un reste dans la division par 9 toujours égal à 8.**
Comment le vérifier sur ces billets ? Connaissez-vous une règle simple pour démontrer qu'un nombre est divisible par 9 ? Pourriez-vous le démontrer ?
On pourra regarder ce cours de 6e sur la division euclidienne :

http://www.educastream.com/division-euclidienne-6eme
On pourra s'aider du fait que l'écriture 2 119 586 900 453 signifie que ce nombre est égal à :

$$2 \times 10^{12} + 1 \times 10^{11} + 1 \times 10^{10} + 9 \times 10^{9} + 5 \times 10^{8} + \cdots + 4 \times 10^{2} + 5 \times 10^{1} + 3 \times 10^{0}$$

Réfléchissez d'abord sur des petits nombres. Menez l'enquete mathématique sur la règle de divisibilité par 9 et 3 et essayez d'aboutir à une démonstration.
On pourra se souvenir que $10 = 9 + 1$ et donc que le reste de la division de 10 par 9 est 1 :)
Comment utiliser cette règle pour les billets de banque ?
On pourra s'aider de la vidéo suivante :
https://fr.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-factors-multiples/pre-algebra-divisibility-tests/v/the-why-of-the-9-divisibility-rule

On a retrouvé des billets tâchés de sang. Que manque-t-il ?



Existe-t-il des cas où une erreur de saisie sur un chiffre du code du billet ne peut pas être détectée ?
Que se passe-t-il si on a interverti deux chiffres ?
Depuis 2014 il y a maintenant deux lettres suivis de 10 chiffres. On remplace encore les lettres par leur rang et on vérifie que le reste de la division du nombre obtenu par 9 vaut 7. Pouvez-vous énoncer une règle de contr$^{o}lecommunepourcesdeuxfami$
Que va-t-il se passer quand les billets à trois lettres arriveront ? L'algorithme unifié sera-t-il encore valable ?

3 Carte bancaire

Un numéro de carte bancaire est constitué de 16 chiffres. Le seizième chiffre correspond à la clé qui permet de valider la carte. C'est l'algorithme de Luhn qui permet de déterminer cette clé. Il permet de vérifier un numéro mais ne valide pas l'existence de la carte.
En partant de la gauche,

- multiplier par deux chaque chiffre de rang impair ; si le résultat de cette multiplication par deux est supérieur à 9, lui soustraire 9 ;
- garder les autres nombres tels qu'ils sont ;
- additionner ensuite tous les chiffres obtenus : ceux qui ont été multipliés par deux et ceux qui n'ont pas été modifiés ;
- prendre le reste R de cette somme dans la division par dix.

Si ce reste R est nul, le garder comme clé sinon prendre son complément à dix, la clé est donc $10 - R$.
Les chifres de la carte suivante retrouvée sur la scène du crime sont-ils corrects :
Un numéro de carte bancaire est donc de la forme :

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} c$$

où a_1, a_2, …, a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation :
I prend la valeur 0
  P prend la valeur 0
  R prend la valeur 0

Traitement :
Pour k allant de 0 à 7 :
R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
I prend la valeur $I + R$
Fin Pour
Pour k allant de 1 à 7 :
  P prend la valeur $P + a_{2k}$
Fin Pour
S prend la valeur $I + P + c$

Sortie :
Si S est un multiple de 10 alors :
  Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
Sinon :
  Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

i. Compléter le tableau suivant permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

ii. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

iii. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.
Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu
6a35 4002 9561 3411 reste correct ?

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.
On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.
Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

4 Autres clés

Il existe également des clés pour les numéros INSEE, ISBN, les codes barres, les numéros de compte bancaire. Menez l'enquête.